UNIVERSITE DU QUEBEC

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A MONTREAL

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE ES SCIENCE (MATHEMATIQUE)

PAR

FRANCOIS BERGERON

B.Sp.Sc. (MATHEMATIQUES)

ESSAI SUR LES CONSTRUCTIONS DE LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

AOUT 1977

SOMMAIRE

I) Nous avons voulu, dans ce mémoire, dégager une présentation de la notion de variété permettant d'envisager, dans un même contexte, les divers types de variétés connues. C'est en modifiant la notion d'espace de J.M. Souriau [voir Géométrie et Relativité, Bibliographie (S)] que nous en sommes arrivé à donner une formulation suffisamment abstraite, du concept de variété différentielle, pour que deviennent évidentes les généralisations cherchées. Les techniques employées découlent, comme nous le soulignerons, de la démarche qu'effectue Godement [Voir Théorie des Faisceaux, Bibliographie (G)] pour ramener la donnée d'un faisceau d'ensemble Γ, sur un espace topologique X, à la donnée d'un espace étalé F, dans l'espace X.

II) Nous obtenons éventuellement une généralisation du concept de variété dans la catégorie TOP, mais il serait possible et intéressant de continuer notre effort pour en arriver à définir une notion de variété dans un topos quelconque, ou encore mieux dans une catégorie possédant certaines propriétés qu'il reste à déterminer. En ce sens notre mémoire n'est que le début d'une étude sur le sujet, et c'est pourquoi il se terminera sur une porte ouverte.

UNIVERSITE DU QUEBEC

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A MONTREAL

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE ES SCIENCE (MATHEMATIQUE)

PAR

FRANCOIS BERGERON

B.Sp.Sc. (MATHEMATIQUES)

ESSAI SUR LES CONSTRUCTIONS DE LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

AOUT 1977

TABLE DES MATIERES

CONVENTIONS

1. Dans ce mémoire, nous travaillons toujours au sein de la catégorie des espaces topologiques (Top); en conséquence, "flèche" signifiera, en cas de doute, "fonction continue" et "espace" ou "objet" signifiera "espace topologique".

2. Plusieurs résultats de topologie seront considérés comme déjà connus du lecteur.

3. Les conventions habituelles de la théorie des catégories sont habituellement respectées, une flèche ↪ signifiera "inclusion" et une flèche ↠ signifiera "surjection".

Introduction

I) Nous avons voulu, dans ce mémoire, dégager une présentation de la notion de variété permettant d'envisager, dans un même contexte, les divers types de variétés connues. C'est en modifiant la notion d'espace de J.M. Souriau [voir Géométrie et Relativité, Bibliographie (S)] que nous en sommes arrivé à donner une formulation suffisamment abstraite, du concept de variété différentielle, pour que deviennent évidentes les généralisations cherchées. Les techniques employées découlent, comme nous le soulignerons, de la démarche qu'effectue Godement [Voir Théorie des Faisceaux, Bibliographie (G)] pour ramener la donnée d'un faisceau d'ensemble Γ, sur un espace topologique X, à la donnée d'un espace étalé F, dans l'espace X.

II) Nous obtenons éventuellement une généralisation du concept de variété dans la catégorie TOP, mais il serait possible et intéressant de continuer notre effort pour en arriver à définir une notion de variété dans un topos quelconque, ou encore mieux dans une catégorie possédant certaines propriétés qu'il reste à déterminer. En ce sens notre mémoire n'est que le début d'une étude sur le sujet, et c'est pourquoi il se terminera sur une porte ouverte.

CHAPITRE I

1. Faisceaux et espaces de Souriau

1.1 Donnons d'abord, en terme classique, une description des espaces au sens de J.M. Souriau. Ceci nous permettra, en effet, de dégager par la suite une formulation plus adéquate à l'étude que nous nous proposons de faire.

Définitions

Une relation bijective R sur un ensemble E est une relation sur E ($R \hookrightarrow E \times E$) telle que:

a) si (a,b) et (a,c) sont dans R alors b = c.

b) si (a,c) et (b,c) sont dans R alors a = b.

Il est intéressant de remarquer que R définit alors une fonction entre deux sous-ensembles de E:

$$A \xrightarrow{R} B,$$

où $A = \{a | (a,b) \in R\}$ et $B = \{b | (a,b) \in R\}$, et où on a posé $R(a) = b$ si $(a,b) \in R$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les relations bijectives:

a) les inverser, en posant: $(a,b) \in R^{-1}$ si et seulement si $(b,a) \in R$

b) les "composer", en posant: $(a,c) \in R \circ T$ si et seulement si il existe $b \in E$ tel que $(a,b) \in T$ et $(b,c) \in R$.

Espace de Souriau

Un espace de Souriau est la donnée d'un ensemble F de relations bijectives sur E, fermé pour l'inversion et la "composition", et vérifiant la condition de recollement suivante:

Si une famille $\{R_i\}_{i\in I}$ d'éléments de F est compatible :

a) $(a,b) \in R_i$ et $(a,c) \in R_j$ entraîne $(b = c)$

b) $(a,c) \in R_i$ et $(b,c) \in R_j$ entraîne $(a = b)$.

Alors $$\bigcup_{i\in I} R_i \in F.$$

La donnée de cette structure permet de munir l'ensemble

$$\tilde{E} = \bigcup_{R\in F} \text{source } (R)$$

d'une structure d'espace topologique en posant:

$$U \in O(\tilde{E}) \text{ si et seulement si } 1_U \in F$$

Les éléments de F deviennent alors des homéomorphismes entre ouverts de $\tilde{E}$, et F est clos pour l'inversion, la composition et la restriction.

Convention concernant la restriction

Pour $f \in F$ et U' un ouvert contenu dans la source de f, la restriction de f à U', notée $f|_{U'}$, est l'unique homéomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \\
U' \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "f|_{U'}"'] & f(U') \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

La condition de recollement décrite précédemment peut maintenant s'énoncer comme suit:

Si une famille $\{U_i \xrightarrow{f_i} V_i\}_{i \in I}$ d'éléments de F est compatible en ce sens que pour tout couple $(i,j) \in I \times I$, on a:

a) $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$,

et

b) $f_i(U_i \cap U_j) = f_i(U_i) \cap f_j(U_j)$,

alors, il existe un unique $f \in F$ tel que:

1) $f: \bigsqcup_{i \in I} U_i \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} V_i$,

2) $f|_{U_i} = f_i$ pour tout $i \in I$.

1.2) Une extension naturelle de la notion d'espace au sens de Souriau peut se décrire comme la donnée:

D.1) d'un groupoïde E dont les objets sont les ouverts d'un espace topologique X.

D.2) d'une opération qui associe à chaque couple (U', f), où $U' \hookrightarrow U \xrightarrow{f} V$, une flèche $f|_{U'} \in F\ell\, E$ de source U' et dont le but est inclus dans V.

Ces données étant soumises aux conditions suivantes:

C.1) $1_U|_{U'} = 1_{U'}$

C.2) $f|_U = f$, si U est la source de f

C.3) $(f|_{U'})_{U''} = f|_{U''}$

C.4) $(q \circ f)|_{U'} = (q|_{f(U')}) \circ (f|_{U'})$, où l'on a posé pour $U' \subseteq \text{source}(f)$:

$$f(U') = \text{But}(f|_{U'})$$

C.5) si $U = \bigsqcup_{i\in I} U_i$, $V = \bigsqcup_{i\in I} V_i$ et $\{U_i \xrightarrow{f_i} V_i\}_{i\in I}$ est une famille "compatible" de flèches de E, i.e. pour tout $(i,j) \in I \times I$:

a) $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$

b) $f_i(U_i \cap U_j) = f_i(U_i) \cap f_j(U_j)$

Alors il existe une et une seule flèche $U \xrightarrow{f} V$ de G telle que, pour tout $i \in I$, on a:

$$f|_{U_i} = f_i$$

Dans ce qui suit, nous entendrons la notion d'espace de Souriau en ce sens nouveau. Cette légère extension est justifiée par le résultat suivant:

Si E est un espace de Souriau dont l'espace sous-jacent X est sobre, alors chaque $U \xrightarrow{f} V \in E(U,V)$ induit un homéomorphisme $|f|$ de U vers V. De plus on a que

$$|q \circ f| = |q| \circ |f|.$$

[On notera f(x) l'image par $|f|$ de x dans U].

Démonstration

I) $U \xrightarrow{f} V \in E(U,V)$ induit une bijection croissante $\tilde{f}^{-1}$, entre le treillis O(V) des ouverts de V et le treillis O(U) des ouverts de U, obtenue en posant pour $V' \hookrightarrow V$, que $\tilde{f}^{-1}(V') = \text{BUT}(f^{-1}|_{V'})$ · f^{-1} est croissante en vertu des propriétés de l'opération de restriction, et comme:

$$\text{BUT}(f^{-1} \circ q^{-1}|_{V'}) = \text{BUT}((q \circ f)^{-1}|_{V'}),$$

puisque $f^{-1} \circ q^{-1} = (q \circ f)^{-1}$, et on doit avoir que $\tilde{f}^{-1}$ est une bijection parce que E est un groupoïde.

Comme X est sobre on a que $\tilde{f}^{-1}$ induit un homéomorphisme $|f|$ de U de V [Voir annexe topologique] qui est en conséquence induit par f.

II) Comme $f^{-1} \circ q^{-1} = (q \circ f)^{-1}$, on doit avoir $|q \circ f| = |q| \circ |f|$ puisque des bijections croissantes $O(W) \xrightarrow{G^{-1}} O(V)$ et $O(V) \xrightarrow{F^{-1}} O(U)$ induisent des homéomorphismes $U \xrightarrow{F} V$ et $V \xrightarrow{G} W$ tels que $G \circ F$ soit l'homéomorphisme induit par $O(W) \xrightarrow{F^{-1} \circ G^{-1}} O(U)$.

2. Faisceaux et espace étalé

2.1 Dans la description de la notion d'espace de Souriau que l'on vient de donner, il y a une condition de recollement que l'on retrouve dans la notion de faisceau sur un espace topologique. R. Godement [Voir (G)] à montré que la catégorie des faisceaux d'ensemble sur un espace topologique est équivalente à la catégorie des espaces étalés dans l'espace topologique en question. Nous allons chercher une description "étalée" de la notion d'espace de Souriau.

Rappelons que:

A. un faisceau d'ensemble F sur un espace topologique X est la donnée:

A.1) pour chaque ouvert U de X, d'un ensemble noté F(U).

A.2) pour chaque ouvert U' contenu dans U, d'une fonction

$$|_{U'}: \quad F(U) \longrightarrow F(U')$$

Ces données étant soumises aux conditions:

C.1) $f|_U = f$, si on a $f \in F(U)$

C.2) $(f|_{U'})|_{U''} = f|_{U''}$

C.3) si $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, et si $\{f_i \in F(U_i)\}_{i \in I}$, est une famille compatible en ce sens que:

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

Pour tout $i \in I$, alors il existe un et un seul $f \in F(U)$ tel que pour tout $i \in I$, on a: $f|_{U_i} = f_i$.

B. Une transformation naturelle entre deux faisceaux F_1, F_2 sur un même espace topologique X, est la donnée d'une famille de fonctions:

$$\theta_U : F_1(U) \longrightarrow F_2(U)$$

telle que pour tout $U' \hookrightarrow U$ on ait le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
F_1(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "U'"'] & F_2(U) \arrow[d, "U'"] \\
F_1(U') \arrow[r, "\theta_{U'}"] & F_2(U')
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $\theta_{U'}(f|_{U'}) = \theta_U(f)|_{U'}$

C. Un espace étalé F dans un espace topologique X, est la donnée:

C.1) d'un espace topologique F.

C.2) et d'un homéormorphisme local $P: F \longrightarrow X$, c'est-à-dire que: pour tout $f \in F$, il existe un voisinage V_f de F tel que $P|_{V_f}: V_f \longrightarrow P(V_f)$ soit un homéormorphisme de V_f sur un voisinage $P(V_f)$ de $P(f)$.

D. Un morphisme entre deux espaces étalés F_1 et F_2 dans un même espace X est la donnée d'une fonction continue

$$F_1 \xrightarrow{h} F_2$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "P_1"'] & & F_2 \arrow[dl, "P_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

2.2 On peut construire, pour un espace étalé $F \xrightarrow{P} X$, un faisceau d'ensemble qu'on nomme faisceau des sections de P et qu'on note $\Gamma(F)$, si l'on pose:

- $\Gamma(F)(U) = \{U \xrightarrow{f} F | P \circ f = 1_U$ et f est continue$\}$, pour $U \in O(X)$
- pour $U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$, que la restriction:

$$|_{U'}: \Gamma(F)(U) \longrightarrow \Gamma(F)(U')$$

est définie en posant

$$f|_{U'} = f \circ j, \text{ si } f \in \Gamma(F)(U).$$

Cela est possible parce que:

$$\begin{aligned} P \circ f|_{U'} &= P \circ f \circ j \\ &= 1_U \circ j \\ &= 1_{U'} \end{aligned}$$

Les conditions 3.C.1, 3.C.2 et 3.C.3 sont alors vérifiées puisque:

3.C.1) $f|_U = f \circ 1_U = f$, pour $f \in \Gamma(F)(U)$

3.C.2) $$\begin{aligned}(f|_{U'})|_{U''} &= (f \circ j) \circ i \\ &= f \circ (j \circ i) \\ &= f|_{U''}\end{aligned}$$

pour $U'' \xhookrightarrow{i} U' \xhookrightarrow{j} U$.

3.C.3) pour $\{f_\alpha \in \Gamma(F)(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, une famille compatible, il existe une et une seule fonction continue:

$$f : \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \longrightarrow F$$

qui soit telle que:

a) $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

b) $P \circ f = 1_U$, où $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

2.3 On peut alors démontrer que:

<u>Théorème 1</u>.

La catégorie FSC(X) des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique X est équivalente à la catégorie ETL(X) des espaces étalés dans X.

<u>Démonstration</u>

Cette démonstration est bien connue, son intérêt pour nous réside dans sa similitude avec d'autres démonstrations que nous exposerons dans la suite du texte.

La démonstration procède comme suit:

(A.) On construit le foncteur $FSC \xrightarrow{E} ETL(X)$

(B.) On construit l'inverse de ce foncteur: $ETL(X) \xrightarrow{E^{-1}} FSC(X)$.

(C.) On montre que $E^{-1} \circ E \xrightarrow{\sim} 1_{FSC}(X)$.

(D.) et que $E^{-1} \circ E \xrightarrow{\sim} 1_{ETL(X)}$, en explicitant les isomorphismes naturels en question.

A.) Construction de $FSC(X) \xrightarrow{E} ETL(X)$.

A.1) pour tout faisceau F sur X, E(F) est l'espace étalé $(\mathcal{F},P)$ obtenu en prenant le quotient de l'espace somme $\sum_{U\in O(X)} F(U) \times U$ [F( ) étant muni de la topologie discrète] par la relation d'équivalence suivante:

Pour (f,x) et (q,y) des éléments de $\sum_{U\in O(X)} F(U) \times U$, on aura $(f,x) \equiv (q,y)$ si et seulement si:

a) $x = y$

b) il existe un ouvert U contenant x tel que.

$$f|_U = q|_U.$$

Nous désignerons par $\lfloor f,x \rfloor$ la classe d'équivalence de (f,x) suivant $\equiv$ et $\lfloor f,x \rfloor$ sera dit germe de f en x.

Alors, on définie $\check{\mathfrak{F}} \xrightarrow{P} X$ comme étant l'unique flèche rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{U \in O(X)} F(U) \times U \arrow[r, two heads, "\Phi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & \check{\mathfrak{F}} \arrow[d, dashed, "P"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

où on a posé que $\Phi((f,x)) = \lfloor f,x \rfloor$ et aussi $\Pi((f,x)) = x$, ces fonctions sont évidemment continues. On conclue que P est un homéomorphisme local en vertu des deux lemmes suivants:

Lemme 1.

La relation d'équivalence $\equiv$ est ouverte.

En effet,

Comme les ouverts $\{f\} \times U'$, où $f \in F(U)$ et $U' \hookrightarrow U$, forment une base de la topologie de $\sum\limits_{U \in O(X)} F(U) \times U$, il suffit de vérifier que le saturé $\lfloor \{f\} \times U' \rfloor$ d'un ouvert $\{f\} \times U'$ pour la relation d'équivalence $\equiv$, est aussi un ouvert.

Si $(q,y) \in \lfloor \{f\} \times U' \rfloor$ alors $(q,y) \equiv (f,y)$ et il existe U'' contenant y et contenu dans U' tel que $f|_{U''} = q|_{U''}$. En conséquence $\{q\} \times U'' \longrightarrow \lfloor \{f\} \times U' \rfloor$ ce qui entraîne que $\lfloor \{f\} \times U' \rfloor$ est un voisinage pour tout ses points donc $\lfloor \{f\} \times U' \rfloor$ est ouvert.

Lemme 2

Si
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & Y/R \arrow[d, "P"] \\ & X \end{tikzcd}$$
commute et si R est ouverte et Π est un homéomorphisme local, alors P est un homéomorphisme local.

En effet,

Pour $y \in Y$ il existe Vy ouvert contenant y tel que

$$Vy \xrightarrow{\Pi|_{Vy}} \Pi(Vy)$$

soit un homéomorphisme sur un ouvert de X. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} Vy \arrow[r, "\phi|_{Vy}"] \arrow[dr, "\Pi|_{Vy}"'] & \phi(Vy) \arrow[d, "P|_{\phi(Vy)}"] \\ & \Pi(Vy) \end{tikzcd}$$

est commutatif, et $\phi|_{Vy}$ est surjective. Comme $\phi|_{Vy}$ est ouverte, il en résulte que $P|_{\phi(Vy)}$ est bicontinue, et le lemme est neutre

A.2) Si (F_1,P_1) et (F_2,P_2) sont les espaces étalés respectivement associé aux faisceaux F_1 et F_2 par E, et si $F_1 \xrightarrow{\theta} F_2$ est une transformation naturelle, alors E(θ) est

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[rr, dashed, "E(\theta)"] \arrow[dr, "P_1"'] & & F_2 \arrow[dl, "P_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Le morphisme d'espace étalé obtenu en posant:

$$E(\theta)\ (\lfloor f,x \rfloor) = \lfloor \theta(f),x \rfloor .$$

Il est évident que $P_2 \circ E(\theta) = P_1$, et il est facile de se convaincre que $E(\theta)$ est continu.

A.3) La définition de E entraîne immédiatement que E est fonctorielle.

B.) Passons maintenant à la construction de E^{-1}: $ETL(x) \longrightarrow FSC(X)$.

B.1) Pour (F,P) un espace étalé, $E^{-1}(F,P)$ est le faisceau $\Gamma(F)$ des sections de P décrit en section 4.

B.2) Pour un morphisme d'espace étalé:

$$h:\ (F_1,P_1) \longrightarrow (F_2,P_2)$$

on aura une transformation naturelle

$$\Gamma(F_1) \xrightarrow{E^{-1}(h)} \Gamma(F_2)$$

définie au moyen de h, qui associe, à chaque section $U \xrightarrow{f} F_1$ de P_1 au-dessus d'un ouvert u de X, la section $U \xrightarrow{h\circ f} F_2$ de P_2 au-dessus de U, c'est-à-dire:

$$E^{-1}(h)_U(f) = h \circ f$$

B.3) La fonctorialité de E^{-1} se déduit directement de la définition de E^{-1}.

C.) Décrivons maintenant l'isomorphisme naturel $1_{FSC(X)} \xrightarrow{\P} E^{-1} \circ E$.

C.1) Pour F un faisceau sur X,

$$F \xrightarrow{\P_F} E^{-1} \circ E(F)$$

est la transformation naturelle qui à $f \in F(U)$ associe la section continue

$$x \longmapsto \lfloor f,x \rfloor$$

de $E(F)$ au-dessus de U.

C.2) $\P$ est alors une transformation naturelle puisque, pour $\theta \in F\ell{\cdot}FSC(X)$:

$$\P(\theta(f))(x) = \lfloor \theta(f),x \rfloor$$

$$= E^{-1} \circ E(\theta) \quad \lfloor f,x \rfloor$$

$$= E^{-1} \circ E(\theta)(\P(f))(x)$$

C.3) $\P$ possède un inverse $\P^{-1}$ qui, à une section f de $E(F)$ au-dessus de U, associe l'unique élément $\P^{-1}(f)$ de $F(U)$ tel que commute le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \times U \arrow[r, hook] & \sum\limits_{U \in O(x)} F(U) \times U \arrow[d, two heads] \\
U \arrow[u, "\{\P^{-1}(f)\} \times 1_U"] \arrow[r, hook, "f"] & E(F)
\end{tikzcd}$$

C.3.1) L'unicité de $\P^{-1}(f)$ résulte de ce que:

si ξ et Ψ sont des éléments de $F(U)$ tels que pour tout $x \in U$ on ait

$$\lfloor \Psi,x \rfloor = f(x) = \lfloor \xi,x \rfloor$$

[Voir le diagramme ci-haut], alors il existe un recouvrement $\{U_x \hookrightarrow U\}_{x \in U}$ de u tel que pour tout $x \in U$ $\Psi|_{U_x} = \xi|_{U_x}$, donc $\Psi = \xi$.

C.3.2) Montrons maintenant que $\P^{-1}(f)$ existe.

Si $U \xrightarrow{f} E(F)$ est une section de $E(F)$, choisissons pour $x \in U$, un $\Psi \in F(V)$ tel que $x \in V$ et $f(x) = \lfloor \Psi, x \rfloor$. Alors, $\{z \in U \cap V \mid f(z) = \lfloor \Psi, z \rfloor\}$ est un ouvert de X, puisque c'est l'image inverse suivant f de $\{\Psi\} \times V$. Posons $W_x = \{z \in U \cap V \mid f(z) = \lfloor \Psi, z \rfloor\}$ et $\Psi_x = \Psi|_{W_x}$, alors la famille $\{\Psi_x\}_{x \in U}$ est compatible en ce sens que:

$$\Psi_x|_{W_x \cap W_y} = \Psi_y|_{W_x \cap W_y}$$

En effet, pour $z \in W_x \cap W_y$ on aura:

$$\left\lfloor (\Psi_x|_{W_x \cap W_y}), Z \right\rfloor = f(z) = \left\lfloor (\Psi_y|_{W_x \cap W_y}), Z \right\rfloor$$

Enfin $\{W_x \hookrightarrow U\}_{x \in U}$

forme un recouvrement de U et, comme F est un faisceau, on a qu'il existe un élément $\P^{-1}(f)$ de $F(U)$ tel que $\P^{-1}(f)|_{W_x} = \Psi_x$ pour tout $x \in U$. Ceci revient à dire que $\P^{-1}(f)$ rend commutatif le diagramme ci-haut.

D.) Enfin, construisons l'isomorphisme naturel μ: $E \circ E^{-1} \xrightarrow{\sim} 1_{ETL(x)}$.

D.1) Pour (F,P) un espace étalé sur x,

$$\begin{tikzcd}
E \circ E^{-1}(F) \arrow[rr, "\mu_F"] \arrow[dr] & & F \arrow[dl, "P"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

μ_F est la fonction continue qui associe à $\lfloor \xi,x \rfloor \in E \circ E^{-1}(F)$, où $\xi\colon U \longrightarrow F$ est une section de P sur U et $x \in U$, l'élément $\xi(x)$ de F:

$$\mu_F(\lfloor \xi,x \rfloor) = \xi(x)$$

D.2) On vérifie facilement que μ est une transformation naturelle.

D.3) De plus μ possède un inverse; pour (F,P) on a

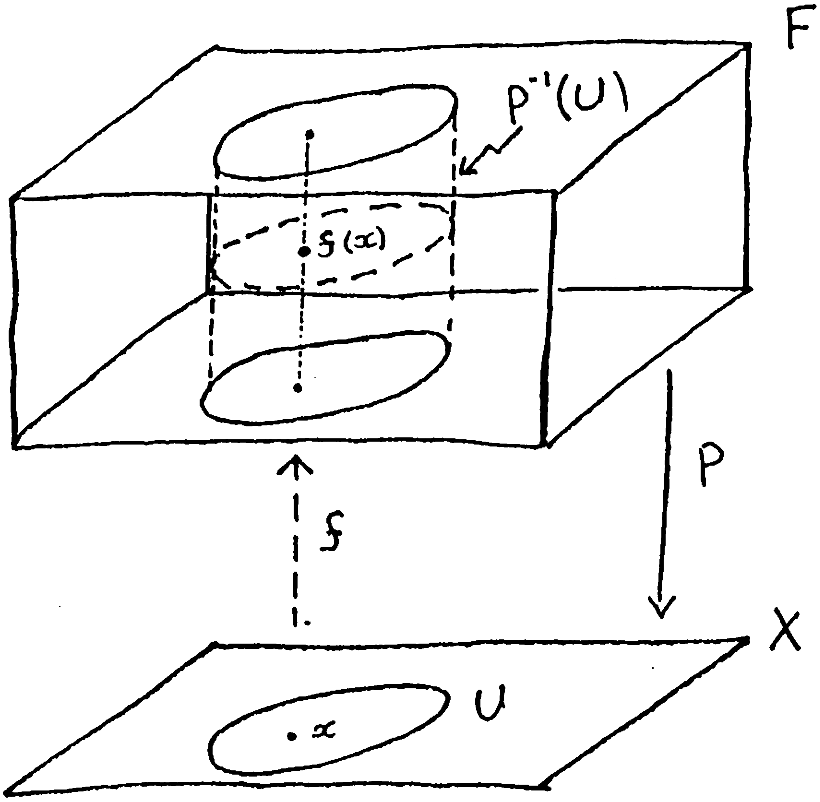
$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\mu_F^{-1}"] \arrow[dr, "P"'] & & E \circ E^{-1}(F) \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

μ_F^{-1} est la fonction continue qui à $\bar{\xi} \in F$ associe l'élément $\mu_F^{-1}(\bar{\xi})$ de $E \circ E^{-1}(F)$ obtenu comme suit:

> Comme P est un homéomorphisme local, il existe une section $U \xrightarrow{\xi} F$ de P, sur un ouvert U de x, telle que $\bar{\xi} \in \xi(U)$. On pose $\mu_F^{-1}(\xi) = \lfloor \xi,P(\bar{\xi}) \rfloor$. Et ceci est une bonne définition parce que si ξ et ξ' sont deux telles sections, on a nécessairement que ξ et ξ' sont identiques sur un voisinage de $P(\bar{\xi})$ donc
>
> $$\lfloor \xi,P(\bar{\xi}) \rfloor = \lfloor \xi',P(\bar{\xi}) \rfloor$$

Le théorème est donc démontré.

2.4 Cette démonstration, malgré sa longueur, est intéressante par le fait que, sous plusieurs déguisements, nous en retrouverons le principe dans la suite du texte. Et, pour apprécier la notion d'espace étalé, nous suggérons la représentation suivante pour (F,P) l'espace étalé associé au faisceau F sur X:



où f: $U \longrightarrow F$ est une section de P au-dessus de U.

La condition de continuité de f nous assure que $\{f(x)\}_{x\in U}$ est une "famille compatible" de germes. Il est ainsi "possible" de "recoller" ces germes en un élément de F(U).

3. Groupoïde topologique et espace de Souriau

3.1 Nous allons maintenant utiliser la notion d'espace étalé pour ramener la donnée d'un espace de Souriau à la donnée d'un "groupoïde topologique".

A.) Un groupoïde topologique G est la donnée:

A.1) de deux espaces topologiques:

a) l'espace des objets: G_0

b) et l'espace des flèches G_F

A.2) ainsi que de fonctions continues:

a) l'unité: $G_0 \xrightarrow{u} G_F$

b) les fonctions sources:

$$G_F \xrightarrow{\delta^1} G_0$$

et buts:

$$G_F \xrightarrow{\delta^o} G_0$$

c) l'opération d'inversion:

$$G_F \xrightarrow{I} G_F$$

d) et la composition

$$G_F \underset{G_0}{\times} G_F \xrightarrow{m} G_F$$

où $G_F \times G_F$ désigne le pull-back:

$$\begin{tikzcd}
G_F \underset{G_0}{\times} G_F \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & G_F \arrow[d, "\delta^1"] \\
G_F \arrow[r, "\delta^o"'] & G_0
\end{tikzcd}$$

ces données devant être soumises aux conditions:

C.1) $\delta^1 \circ u = 1_{G_0}$

C.2) $\delta^o \circ u = 1_{G_0}$

C.3) m est associative:

$$\begin{tikzcd}
G_F \underset{G_0}{\times} G_F \underset{G_0}{\times} G_F \arrow[r, "1_{G_F} \times m"] \arrow[d, "m \times 1_{GF}"'] & G_F \underset{G_0}{\times} G_F \arrow[d, "m"] \\
G_F \underset{G_0}{\times} G_F \arrow[r, "m"'] & G_F
\end{tikzcd}$$

C.4) u est l'unité de m:

a) $m \circ [1_{G_F} \times u] = 1_{G_F}$

b) $m \circ [u \times 1_{G_F}] = 1_{G_F}$

C.5) Si $f \circ q$ désigne plus simplement $m(f,q)$, alors:

a) $\delta^1(f \circ q) = \delta^1(q)$

b) $\delta^0(f \circ q) = \delta^0(f)$

C.6) $I(f)$ est l'inverse de f pour m:

a) $f \circ I(f) = u(\delta^0(f))$

b) $I(f) \circ f = u(\delta^1(f))$

ou encore:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "I(f) \circ f"] \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[loop right, "f \circ I(f)"] \end{tikzcd}$$

B.) Un foncteur continue $G_1 \xrightarrow{H} G_2$ entre deux groupoïdes topologiques G_1 et G_2 est la donnée d'un couple de fonctions continues (H_0, H_F):

$$G_0 \overset{H_0}{\dashrightarrow} G_0 \quad \text{et} \quad G_F \overset{H_F}{\dashrightarrow} G_F$$

telle que les diagrammes suivants commutent:

a)
$$\begin{tikzcd} G_{10} \arrow[r, dashed, "H_0"] \arrow[d, "u"'] & G_{20} \arrow[d, "u_2"] \\ G_{1F} \arrow[r, dashed, "H_F"] & G_{2F} \end{tikzcd}$$

b)
$$\begin{tikzcd} G_{1F} \arrow[r, dashed, "H_F"] \arrow[d, "\delta_1^1"'] & G_{2F} \arrow[d, "\delta_2^1"] \\ G_{10} \arrow[r, dashed, "H_0"] & G_{20} \end{tikzcd}$$

c)
$$\begin{tikzcd} G_{1F} \arrow[r, dashed, "H_F"] \arrow[d, "\delta_1^0"'] & G_{2F} \arrow[d, "\delta_2^0"] \\ G_{10} \arrow[r, dashed, "H_0"] & G_{20} \end{tikzcd}$$

d)
$$\begin{tikzcd}
G_{1F} \times_{G_{10}} G_{1F} \arrow[r, dashed, "H_F \times H_F"] \arrow[d, "m_1"'] & G_{2F} \times_{G_{20}} G_{2F} \arrow[d, "m_2"] \\
G_{1F} \arrow[r, dashed, "H_F"] & G_{2F}
\end{tikzcd}$$

3.2 Alors, on a le théorème suivant:

Théorème 2.

La donnée d'un espace de Souriau est équivalente à la donnée d'un groupoïde topologique local (i.e.: pour lequel les fonctions sources et buts sont des homéomorphismes locaux) si l'espace sous-jacent à l'espace de Souriau et l'espace des objets du groupoïde sont sobres.

Nous soulignerons au cours de la démonstration l'importance des conditions du théorème. Mais avant d'entreprendre la démonstration, nous prévenons le lecteur que plusieurs détails de cette preuve, parce qu'ils sont semblables à ceux du théorème 1., ne seront pas explicités.

Démonstration

A. A un espace de Souriau E, au sens de la section 1.2, associons un groupoïde topologique local G(E), en posant que:

a) $G(E)_0 = X$, où X est l'espace topologique sous-jacent à E.

b) $G(E)_F = \sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U/\equiv$, c'est-à-dire que $G(E)_F$ est le quotient de $\sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U$ [où $E(U,V)$ est considéré comme espace discret]

par la relation d'équivalence suivante:

$$(f,x) \equiv (q,y)$$

si et seulement si: $x = y$ et il existe un voisinage V de x sur lequel f et q sont identiques: $f|_V = q|_V$. On désignera par $\lfloor f,x \rfloor$ la classe d'équivalence de (f,x) suivant $\equiv$.

A.1) on définie alors la fonction sources:

$$\delta^1 : G(E)_F \longrightarrow G(E)_0$$

$$\delta^1(\lfloor f,x \rfloor) = x.$$

C'est là un homéomorphisme local en vertu des lemmes 1. et 2. de la section 2.3.

A.2) on définit l'opération d'inversion:

$$I : G(E)_F \longrightarrow G(E)_F$$

en posant pour $\lfloor f,x \rfloor \in G(E)_F$, que

$$I(\lfloor f,x \rfloor) = \lfloor f^{-1}, f(x) \rfloor$$

où $f(x)$ désigne l'image associé à x par $|f|$ l'homéomorphisme induit par $f \in E(U,V)$ entre U et V, parce que X est sobre [Voir section 1.2]. Montrons que I est continue. On peut construire pour chaque U et V dans $O(X)$, la fonction:

$$\mathcal{T}_{U,V} : E(U,V) \times U \longrightarrow E(V,U) \times V$$

qui associe à (f,x) le couple $(f^{-1}, f(x))$. Comme $E(U,V)$ est muni de la topologie discrète, et comme pour f fixé on a que

$$\mathcal{T}_{U,V}(f,x) = (f^{-1}, |f|(x))$$

pour tout x dans U, $\mathfrak{I}_{U,V}$ est continue. On peut alors recoller les $\mathfrak{I}_{U,V}$ pour obtenir une fonction continue:

$$\sum_{U,V\in O(X)} E(U,V) \times U \xrightarrow{\mathfrak{I}} \sum_{U,V\in O(X)} E(U,V) \times U$$

et on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\sum_{U,V\in O(X)} E(U,V) \times U \arrow[r, "\mathfrak{I}"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "\phi"'] & \sum_{U,V\in O(X)} E(U,V) \times U \arrow[d, twoheadrightarrow, "\phi"] \\
G(E)_F \arrow[r, "I"] & G(E)_F
\end{tikzcd}$$

En effet, si $(f,x) \equiv (q,y)$, on a que $x = y$ et qu'il existe U' contenant x tel que $f|_{U'} = q|_{U'}$. On aura donc que $f^{-1}|_{f(U')} = q^{-1}|_{f(U')}$ et $f(x) = q(x)$ d'où

$$\mathfrak{I}(f,x) = (f^{-1},f(x)) \equiv (q^{-1},q(x)) = \mathfrak{I}(q,x).$$

Ceci montre que I est continue parce que ϕ est un homéomorphisme local.

A.3) On définit la fonction but:

$$\delta^o\colon\ G(E)_F \longrightarrow G(E)_O$$

$$\delta^o(\lfloor f,x \rfloor) = f(x).$$

La continuité de δ^o est conséquence de celle de δ^1 puisque

$$\delta^o = \delta^1 \circ I.$$

A.4) On définit l'unité:

$$u\colon\ G(E)_0 \longrightarrow G(E)_F$$

en posant pour $x \in G(E)_0$, que $u(x) = \lfloor 1_X, x \rfloor$. Il est facile de voir que u est continue.

A.5) Enfin la composition:

$$m\colon\ G(E)_F \underset{G(E)_0}{\times} G(E)_F \longrightarrow G(E)_F$$

se définit en posant, pour $\lfloor q,y \rfloor$ et $\lfloor f,x \rfloor$ dans $G(E)_F$ tels que $y = f(x)$, que:

$$m(\lfloor q,y \rfloor, \lfloor f,x \rfloor) = \lfloor q|_V \circ f, x \rfloor$$

où $V = \mathrm{source}(q) \cap \mathrm{but}(f)$

[V est non vide parce que $y = f(x)$].

Nous allons montrer que m est continue:

Si U, V et W sont dans $O(X)$, et si $(E(U,V) \times U) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V)$

désigne le pull-back:

$$\begin{tikzcd}
(E(U,V) \times U) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V) \arrow[r] \arrow[d] & E(V,W) \times V \arrow[d, "\Pi_V"] \\
E(U,V) \times U \arrow[r, "e_v"] & V
\end{tikzcd}$$

[Π_V étant la projection sur V et e_v étant la fonction continue obtenue en posant $e_v(f,x) = f(x)$], définissons:

$$(E(U,V) \times U) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V) \xrightarrow{M_{U,V,W}} E(U,W) \times U$$

$$M_{U,V,W}((f,x),(q,y)) = (q \circ f, x).$$

Alors $M_{U,V,W}$ est continue. En effet pour

$$((f,x),(q,y)) \in M^{-1}_{U,V,W}(\{\xi\} \times U')$$

$[U' \longrightarrow U;\ x \in U'$ et $\xi \equiv q \circ f]$, on a que

$$[(\{f\} \times U') \times (\{q\} \times V)] \cap (E(U,V) \times U) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V)$$

est un ouvert entièrement contenu dans $M^{-1}_{U,V,W}(\{\xi\} \times U')$. On conclue que $M^{-1}_{U,V,W}(\{\xi\} \times U')$ est ouvert, ce qui montre que $M_{U,V,W}$ est continu puisque les ouverts $\{f\} \times U'$ forment une base de la topologie de $E(U,V) \times U$.

Recollons les $M_{U,V,W}$ pour obtenir:

$$\sum_{U,V,W \in O(X)} (E(U,V) \times U) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V) \xrightarrow{M} \sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U.$$

on a alors un diagramme commutatif:

([illegible])

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{U,V,W \in O(X)} (E(U,V) \underset{V}{\times} (E(V,W) \times V) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\Psi"] & \displaystyle\sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U \arrow[d, two heads, "\phi"] \\
G(E)_F \underset{G(E)_0}{\times} G(E)_F \arrow[r, "m"] & G(E)_F
\end{tikzcd}$$

où Ψ est la fonction:

$$\Psi((f,x),(q,y)) = (\lfloor f,x \rfloor, \lfloor q,y \rfloor)$$

Ψ rend commutatif le diagramme, parce que:

$$m \circ \Psi((f,x),(q,y)) = m(\lfloor f,x \rfloor, \lfloor q,y \rfloor)$$

$$= \lfloor q \circ f,x \rfloor$$

$$= \phi(q \circ f,x)$$

$$= \phi \circ M((f,x),(q,y))$$

et Ψ est un homéomorphisme local puisque pour f et q fixés $[f \in E(\mathcal{U},\mathcal{V})$ et $q \in E(\mathcal{V},\mathcal{W})]$, l'ouvert

$$W_{f,q} = [(\{f\} \times \mathcal{U}') \times (\{q\} \times \mathcal{V})] \cap (E(\mathcal{U},\mathcal{V}) \times \mathcal{U}) \times_{\mathcal{V}} (E(\mathcal{V},\mathcal{W}) \times \mathcal{V})$$

fait en sorte que $\Psi|_{W_{f,q}}$ soit injective puisque:

$$\Psi|_{W_{f,q}}((f,x),(q,y)) = \Psi|_{W_{f,q}}((f,x),(q,y))$$

$$(\lfloor f,x \rfloor, \lfloor q,y \rfloor) = (\lfloor f,x' \rfloor, \lfloor q,y' \rfloor)$$

$$\lfloor f,x \rfloor = \lfloor f,x' \rfloor \quad \text{et} \quad \lfloor q,y \rfloor = \lfloor q,y' \rfloor$$

donc

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

comme $\Psi|_{W_{f,q}}$ est le composé:

$$\begin{tikzcd}
(E(U,V) \times U) \times_V (E(V,W) \times V) \arrow[r, "M_{U,V,W}"] & E(U,W) \times U \arrow[d, hook] \\
& \sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U \arrow[d, two heads] \\
W_{f,q} \arrow[uu, hook] \arrow[r, dashed] & G(E)_F
\end{tikzcd}$$

on a que $\Psi|_{W_{f,q}}$ est continue et il est facile de vérifier que $\Psi|_{W_{f,q}}$ est ouverte.

On conclue que m est continue en vertu de (●) et du fait que ϕ et Ψ sont des homéomorphismes locaux.

A.6) De plus, on a bien que ces fonctions sont soumises aux conditions qui caractérisent un groupoïde, parce que les vérifications de ce fait peuvent toutes s'effectuer comme dans l'exemple suivant:

$$\begin{aligned}
\lfloor f,x \rfloor \circ I(\lfloor f,x \rfloor) &= \lfloor f,x \rfloor \circ \lfloor f^{-1},f(x) \rfloor \\
&= \lfloor f \circ f^{-1},f(x) \rfloor \\
&= u(f(x))
\end{aligned}$$

B.) Inversement à un groupoïde topologique local G, associons l'espace de Souriau E(G) obtenu comme suit:

B.1) Les objets de E(G) sont les ouverts de G_0.

B.2) Les flèches de E(G) sont des sections continues de la fonction source:

$$E(G)(U,V) = \{U \xrightarrow{f} G_F \mid \delta^1 \text{ o } f = 1_U \text{ et } \delta^o(f(U)) = V\}.$$

Intuitivement, les flèches de E(G) sont des "homéomorphismes" obtenus comme suit:

$$\begin{tikzcd}
& G_F \arrow[rr, "\delta^o"] & & G_0 \\
G_0 & U \arrow[l, hook'] \arrow[u] \arrow[rr, dashed] & & V \in F\ell(E(G)) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

B.3) Pour u un ouvert de G_0, l'identité de U dans E(G) est la section:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & G_0 \arrow[d, "u"] \\
& G_F
\end{tikzcd}$$

B.4) Pour f une flèche de E(G), l'inverse f^{-1} de f est:

$$\begin{tikzcd}
G_F & G_F \arrow[l, "I"'] & \\
\mathcal{U} \arrow[u, "f"] & \mathcal{U} \underset{G_F}{\times} G_F \arrow[l, dashed] \arrow[u] & \mathcal{V} \arrow[ul, dashed, "f^{-1}"'] \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Le pull-back de f le long de I. Ceci a du sens puisque

$$\mathcal{U} \times G_F = \{(x,q) | f(x) = I(q)\}$$

$$\cong \{x | x = \delta^0(f(y))\} = \mathcal{V}$$

B.5) Enfin la composition de E(G) associe à f $\in$ E(G)($\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$) et q $\in$ E(G)($\mathcal{V}$,$\mathcal{W}$) la section de δ^1 au-dessus de $\mathcal{U}$:

$$q \circ f: \mathcal{U} \longrightarrow G_F$$

obtenue en posant:

$$q \circ f(x) = m(q(\delta^0(f(x))), f(x)).$$

B.6) Le fait $1_{\mathcal{U}}$ soit l'unité de $\mathcal{U}$ pour cette composition est alors évident, et l'associativité de la composition est facile à vérifier.

C.) On a bien alors que l'espace E(G(E)) [c'est-à-dire: l'espace de Souriau associe au groupoïde topologique local associé lui-même à l'espace de Souriau E] est isomorphe à E.

C.1) E et E(G(E)) ont d'abord les mêmes objets par construction de E(G(E)).

C.2) Nous allons montrer qu'il y a isomorphisme du point de vue des flèches:

a) A $U \xrightarrow{f} V$ une flèche de E, faisons correspondre la flèche $\P(f) \in E(G(E))(U,V)$ obtenue comme suit:

$$\P(f) : U \longrightarrow G(E)_F$$

est la section de δ^1 au-dessus de U telle que

$$\P(f)(x) = \lfloor f,x \rfloor,$$

comme $f(U) = V$, on a bien que $\delta^0(\P(f)(U)) = V$, et $\P(f) \in E(G(E))(U,V)$.

b) ¶ respecte l'unité et la composition évidemment.

c) ¶ possède un inverse $\P^{-1}$ qui, à une flèche h dans $E(G(E))(U,V)$, fait correspondre $U \xrightarrow{\P^{-1}(h)} V$ l'unique flèche de $E(U,V)$ telle que commute le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
E(U,V) \times U \arrow[r, hook] & \displaystyle\sum_{U,V \in O(X)} E(U,V) \times U \arrow[d, two heads] \\
U \arrow[u, "\{\P^{-1}(h)\} \times 1_U"] \arrow[r, "h"] & G(E)_F
\end{tikzcd}$$

L'existence et l'unicité de $\P^{-1}(h)$ se montre de façon directement analogue à ce qui a été fait lors du théorème 1., partie C.3.

D.) Enfin, on a aussi que $G(E(G))$ [le groupoïde associé à l'espace de Souriau lui-même associé au groupoïde topologique local G] est isomorphe à G.

D.1) Remarquons d'abord que l'espace des objets est le même pour $G(E(G))$ et G.

D.2) Nous allons définir un homéomorphisme entre l'espace des flèches de $G(E(G))$ et celui de G, qui sera fonctoriel:

a) soit $\lfloor f,x \rfloor \in G(E(G))_F$ alors $f \in E(G)(U,V)$, c'est-à-dire $U \xrightarrow{f} G_F$ est une section continue de δ^1. Posons:

$$\mu(\lfloor f,x \rfloor) = f(x).$$

Alors μ: $G(E(G))_F \longrightarrow G_F$ est une fonction continue pour des raisons analogues à ce qui a été fait en partie D.1, du théorème 1.

b) μ possède un inverse μ^{-1} continu qui associe à $f \in G_F$ l'élément $\lfloor \tilde{f},x \rfloor \in G(E(G))_F$ obtenu en posant que $\tilde{f}$ est une section de δ^1 dont l'image contient $f(x)$. Ceci est possible parce que δ^1 est un homéomorphisme local.

c) μ est fonctorielle parce que:

$$- \mu(\lfloor 1_x,x \rfloor) = 1_x(x) = x$$

$$- \mu(\lfloor f,y \rfloor \circ \lfloor q,x \rfloor) = \mu(\lfloor f \circ q,x \rfloor)$$

$$= \mu(\lfloor f,y \rfloor) \circ \mu(\lfloor q,x \rfloor)$$

Ceci achève la démonstration.

3.3 Exemple

On a un espace de Souriau caractérisé par la donnée du groupoïde R dont les objets sont les ouverts de l'espace:

$$X = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$$

munit de la topologie habituelle, et dont les flèches sont les difféomorphismes entre tels ouverts. La restriction de $U \xrightarrow{f} V$ une flèche de R à un ouvert U' contenue dans U: $f|_{U'} = U \longrightarrow f(U)$ est un difféomorphisme, donc est une flèche de R. Si $\{U_i \xrightarrow{f_i} V_i\}_{i\in I}$ est une famille "compatible" d'éléments de R, on a alors que la fonction continue:

$$f: \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} V_i$$

qui à $x \in \coprod_{i\in I} U_i$ associe $f(x) = f_i(x)$, si $x \in U_i$,

est un difféomorphisme. Donc f est une flèche de R.

Le groupoïde topologique R peut, en conséquence, se décrire comme suit:

$$- R_0 = \sum_{n\in N} R^n$$

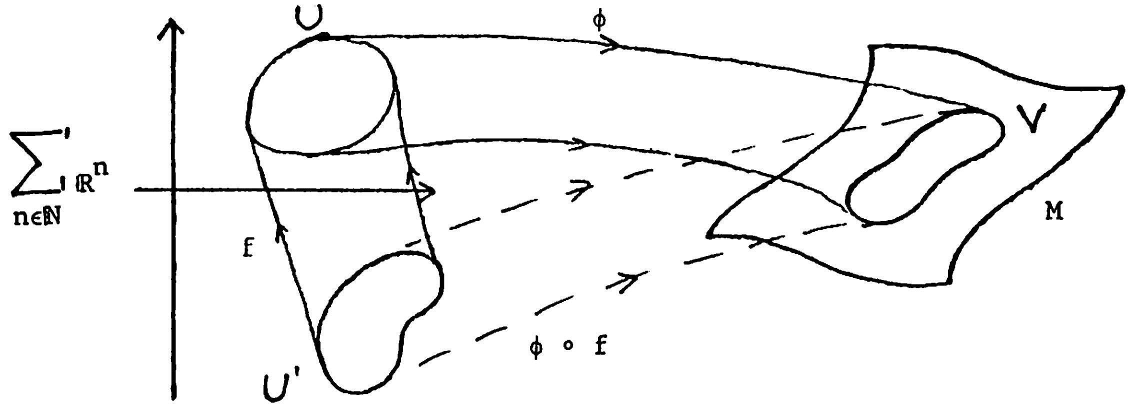
$$- R_F = \sum_{U,V\in 0(R_0)} \mathrm{DIFF}(U,V) \times U/\equiv$$

4. Variétés et groupoïdes

4.1 Comme l'intérêt de l'espace de Souriau R réside dans son importance pour la construction des variétés différentielles, nous chercherons à décrire la notion de variété différentielle en terme du groupoïde topologique R.

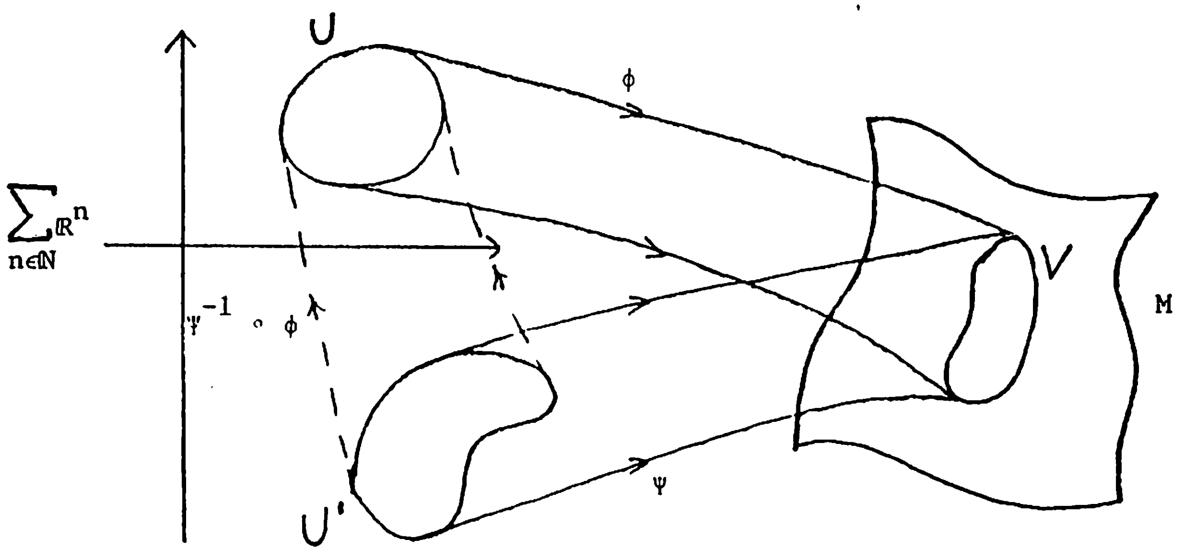
Classiquement, pour se donner une structure de variété différentielle sur un espace topologique M, on commence par préciser quels sont les homéomorphismes, entre ouverts de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et ouverts de M, qui seront considérés comme des difféomorphismes. Donc, on se donne, pour tout ouvert U de R_0 et tout ouvert V de M, un ensemble $D_M(U,V)$ |l'ensemble des "difféomorphismes" de U vers V|. Nous demanderons que ces données soient soumises aux conditions suivantes, qui expriment le fait que le composé de difféomorphismes se doit d'être un difféomorphisme:

γ.1) Si $U \xrightarrow{\phi} V \in D_M(U,V)$ et $U' \xrightarrow{f} U \in R(U',U)$, i.e.:

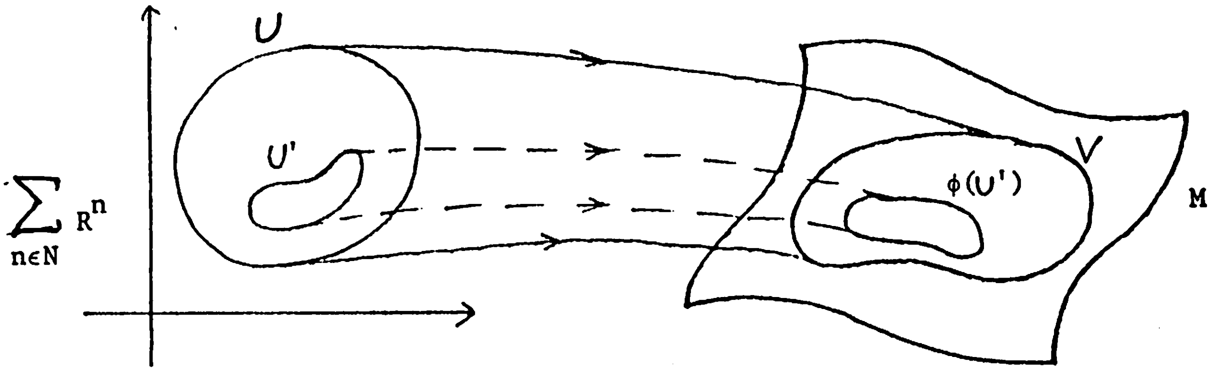


Alors, $\phi \circ f \in D_M(U',V)$

γ.2) Si $U \xrightarrow{\phi} V \in D_M(U,V)$ et $U' \xrightarrow{\psi} V \in D_M(U',V)$, alors $\psi^{-1} \circ \phi \in R(U,U')$, i.e.:



γ.3) Pour U' un sous-ouvert de U et $\phi \in D_M(U,V)$, alors $\phi|_{U'} \in D_M(U',\phi(U'))$, i.e.:



γ.4) Pour une famille

$$\{\phi_\alpha \in D_M(U_\alpha,V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

compatible en ce sens où:

i) $\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \phi_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$

ii) $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta)$

alors l'unique homéomorphisme $[U = \bigsqcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ et $V = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha]$

$$\phi : U \longrightarrow V,$$

tel que pour tout $\alpha \in A$ on ait: $\phi|_{U_\alpha} = \phi_\alpha$, est dans $D_M(U,V)$.

γ.5) Soit $x \in M$ alors il existe un ouvert U de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et un ouvert V de M contenant x et qui sont tels que $D_M(U,V)$ soit non vide.

4.2 Nous nous proposons de décrire, en terme du groupoïde topologique local R, la notion de variété différentielle. On obtient en effet qu'une variété différentielle peut être caractérisée par la donnée d'un espace étalé dans R_0 muni d'une "action" de R_F; plus précisément, on a:

<u>Théorème 3</u>.

La donnée d'une variété différentielle M est équivalente à la donnée d'un triplet $(D,P,*)$, où:

a) D est un espace topologique (l'espace des germes de difféomorphismes entre les points de R_0 et ceux de M).

b) P est un homéomorphisme local de D vers R_0:

$$P:\ D \longrightarrow R_0$$

(P envoie un germe de difféomorphisme sur sa source).

c) $*$ est une "composition" entre les éléments de R_F et ceux de D, i.e.:

$$*:\ D \underset{R_0}{\times} R_F \longrightarrow D,$$

où $D \underset{R_0}{\times} R_F$ désigne le pull-back:

$$\begin{tikzcd} D \underset{R_0}{\times} R_F \arrow[r, "\pi_D"] \arrow[d] & D \arrow[d, "P"] \\ R_F \arrow[r, "\delta o"'] & R_0 \end{tikzcd}$$

(* permet de composer un germe de difféomorphisme, entre un point de R_0 et un point de M ($\in D$), avec un germe de difféomorphisme entre deux points de R_0 ($\in R_F$)).

Si P et $*$ vérifient les identités suivantes pour tout $\phi \in D$, tout $f, q \in R_F$ et tout $x \in R_O$:

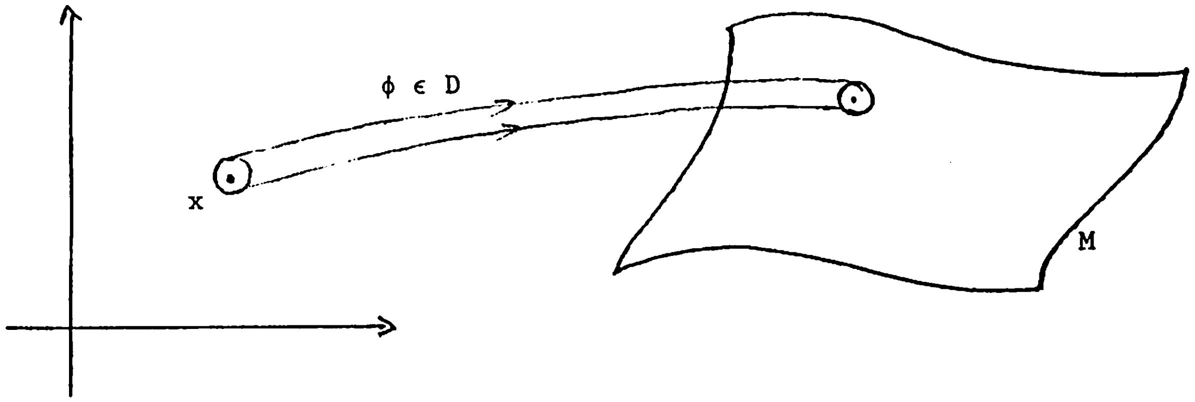
i) $P(\phi * f) = \delta^{1}(f)$, si $\delta^{o}(f) = P(\phi)$

ii) $\phi * u(x) = \phi$ (u désigne ici l'identité de R).

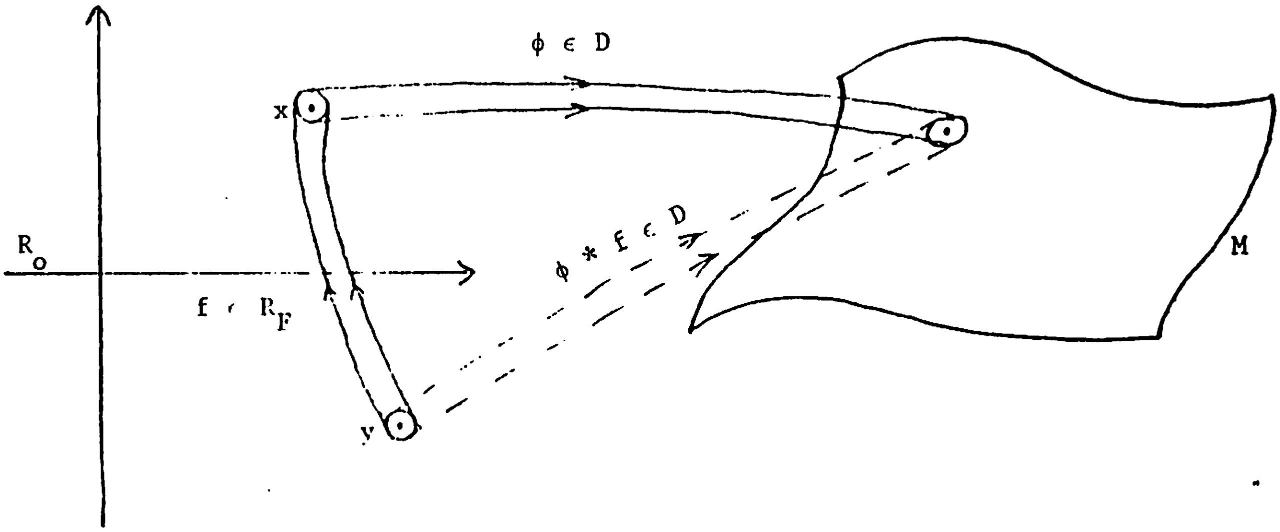
iii) $\phi * (f \circ q) = (\phi * f) * q$, si $\delta^{o}(f) = P(\phi)$ et $\delta^{1}(f) = \delta^{o}(q)$

iv) $(\phi * f = \phi * q) \Rightarrow (f = q)$, si $\delta^{o}(f) = \delta^{o}(q) = P(\phi)$

Intuitivement, les éléments de D peuvent se représenter comme:

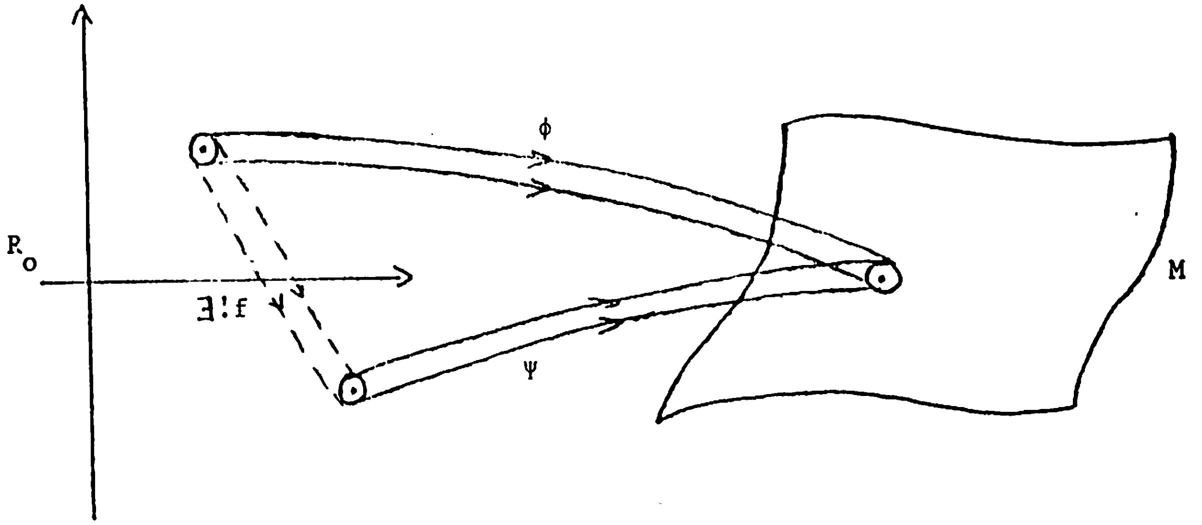


la composition *:



et les identités i), ii) et iii) assurent que * est une bonne composition. L'identité iv), elle, est une traduction du point de vue des germes de γ.2):

Pour ϕ et Ψ éléments de D, il existe au plus un élément f de R_F tel que:



Démonstration du théorème

A. Soit M une variété différentielle, construisons le triplet (D(M),P,*) correspondant:

A.1) $D(M) = \sum_{\substack{U\in O(R_0)\\ V\in O(M)}} D_M(U,V) \times U/\equiv$ c'est-à-dire que D(M) est l'espace quotient de : $\sum_{\substack{U\in O(R_0)\\ V\in O(M)}} D_M(U,V) \times U$

[où $D_m(U,V)$ est considéré comme espace discret]

par la relation d'équivalence ≡ définie comme:

$$(\phi , x) \equiv (\Psi , y)$$

si et seulement si x = y et il existe un ouvert U de R_0 contenant x tel que $\phi|_U = \Psi|_U$.

A.2) P est l'homéomorphisme local de D(M) vers R_0 défini en posant $P(\lfloor \phi, x \rfloor) = x$ pour $\lfloor \phi, x \rfloor \in D(M)$. On vérifie alors que P est bien un homéomorphisme local de façon analogue à ce qui a été fait lors du Théorème 1.

A.3) $*: D(M) \underset{R_0}{\times} R_F \longrightarrow D(M)$ la "composition" est la fonction continue définie en posant:

$$\lfloor \phi, f(x) \rfloor * \lfloor f, x \rfloor = \lfloor \phi|_{f(V)} \circ f|_{V}, x \rfloor,$$

où $V = f^{-1}(U \cap U')$ si $f \in R(U'', U')$ et $\phi \in D_M(U, W)$.

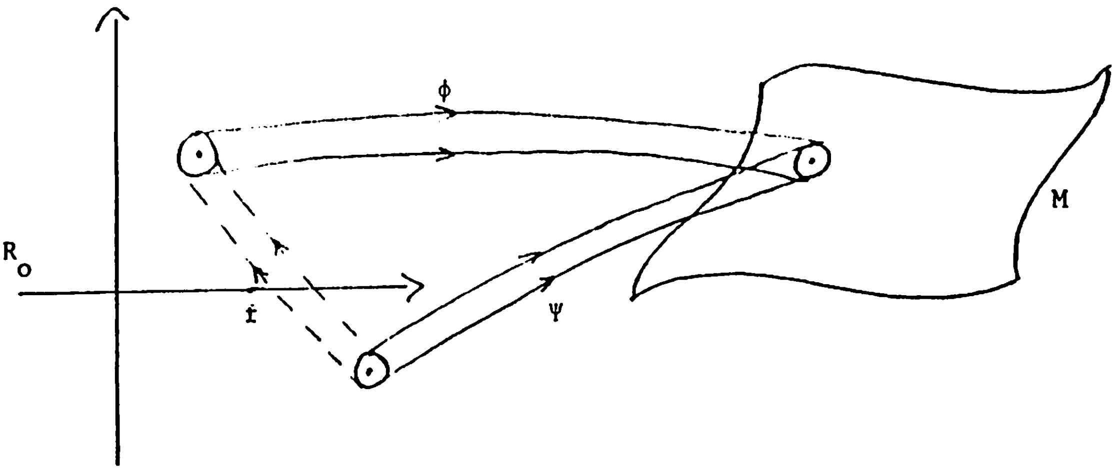
A.4) Le lecteur pourra facilement se convaincre que P et * vérifient les identités i), ii), iii) et iv).

B. Inversement étant donné un triplet $(D, P, *)$ vérifiant i), ii), iii) et iv), construisons la variété différentielle M(D) correspondante.

B.1) L'espace topologique M(D), sur lequel on définira la structure de variété différentielle, est obtenu en posant:

$$M(D) = \mathrm{COKER}(*, \pi_D),$$

donc en effectuant un certain quotient de D. Des éléments ϕ, Ψ de D seront identifiés s'il existe un élément $f \in R_F$ tel que $\Psi = \phi * f$:



M(D) est le quotient de D par la relation d'équivalence:

$$\begin{tikzcd}
D \underset{R_o}{\times} R_F \arrow[r, shift left, "\Pi_D"] \arrow[r, shift right, "*"'] & D
\end{tikzcd}$$

où Π_D et * sont des homéomorphismes locaux.

En effet Π_D est le pull-back le long de P de l'homéomorphisme local δ^o. Donc Π_D est un homéomorphisme local [voir annexe topologique]. De plus on peut construire $D \underset{R_o}{\times} R_F \xrightarrow{J} D \underset{R_o}{\times} R_F$ continue, en posant $J(\phi,f) = (\phi*f,f^{-1})$ [la continuité de J découle de celle de * et $R_F \xrightarrow{I} R_F$], et on a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
D \underset{R_o}{\times} R_F \arrow[r, "*"] \arrow[d, "J"'] & D \\
D \underset{R_o}{\times} R_F \arrow[ur, "\Pi_D"'] &
\end{tikzcd}$$

où J est un homéomorphisme $[J^2 = 1]$; d'où * est un homéomorphisme local [voir annexe topologique].

Et le morphisme quotient

$$D \xrightarrow{\mu} \!\!\!> M(D)$$

est un homéomorphisme local.

B.2) Le composé d'une section continue $\bar{\phi}$ de P au-dessus de U et de μ: $D \longrightarrow\!\!> M(D)$ est en général, un homéomorphisme local puisque μ et $\bar{\phi}$ le sont. Si de plus $\bar{\phi}$ est injectif, c'est une immersion ouverte ϕ de U vers un ouvert V de M. Un élément $\phi \in D_M(U,V)$ est exactement décrit par un $\bar{\phi}$ tel que $\mu\circ\bar{\phi}$ soit injectif:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, two heads, "\mu"] & M \\
U \arrow[u, "\bar{\phi}"] \arrow[r, dashed, "\phi\in D_M(U,V)"'] & V \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Un tel composé étant ouvert et injectif, on conclue que ϕ est un homéomorphisme.

B.3) Vérifions que les conditions [de la Section 4.1] qui font de M une variété différentielle, sont vérifiées.

I) Le composé $\phi \circ f$, de $\phi \in D_M(\mathcal{U},\mathcal{V})$ et $f \in R(\mathcal{U}',\mathcal{U})$, est dans $D_M(\mathcal{U}',\mathcal{V})$. En effet, $\phi \circ f$ peut s'obtenir comme composé de μ et $\bar{\Psi}$, où $\bar{\Psi}$ est la section de P au-dessus de $\mathcal{U}'$:

$$\bar{\Psi}(x) = \phi(f(x)) * \lfloor f,x \rfloor$$

[$\bar{\phi}$ étant une section de P au-dessus de $\mathcal{U}$ qui définie ϕ], telle que $\mu \circ \bar{\Psi}$ soit injectif:

$$\mu \circ \bar{\Psi}(x) = \mu(\bar{\phi}(f(x)) * \lfloor f,x \rfloor)$$

$$= \mu(\bar{\phi}(f(x)))$$

$$= \mu \circ \bar{\phi} \circ f(x)$$

II) Si $\phi \in D_M(\mathcal{U},\mathcal{V})$ et $\Psi \in D_M(\mathcal{U}',\mathcal{V})$ alors $\Psi^{-1} \circ \phi \in R(\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Soit $\bar{\phi}$ et $\bar{\Psi}$ des sections de P qui définissent respectivement ϕ et Ψ. On a alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, que

$$\bar{\phi}(x) \equiv \bar{\Psi}(y)$$

[si $y = \Psi^{-1} \circ \phi(x)$], c'est-à-dire qu'il existe $\lfloor f_x,x \rfloor \in R_F$ tel que $f_x(x) = y$ et

$$\bar{\phi}(x) = \bar{\Psi}(y) * \lfloor f_x,x \rfloor$$

[on peut choisir f_x de façon telle que $f_x \in R(\mathcal{U}_x,\mathcal{U}'_x)$, où $\mathcal{U}_x \hookrightarrow \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'_x \hookrightarrow \mathcal{U}'$].

Mais $V_x = \{z \in \mathcal{U}_x | f_x(z) = \Psi^{-1} \circ \phi(z)\}$ est un ouvert non vide puisque $f_x(x) = \Psi^{-1} \circ \phi(x)$, il est donc possible de recoller la famille $\{f_x|_{V_\alpha}\}_{x \in \mathcal{U}}$ pour obtenir $\Psi^{-1} \circ \phi$ qui en conséquence est élément de $R(\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

C. Alors montrons que M est isomorphe à M(D(M)):

C.1) Construisons la fonction $\P: M \longrightarrow M(D(M))$. Pour $x \in M$ on sait qu'il existe des ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, de R_0 et M respectivement, tels que $D_M(\mathcal{U},\mathcal{V}) \neq \emptyset$, et $x \in \mathcal{V}$. On peut donc poser:

$$\P(x) = \mu(\lfloor \phi,\phi^{-1}(x) \rfloor),\ \phi \in D_M(\mathcal{U},\mathcal{V})$$

et ceci a du sens parce que, pour $\Psi \in D_M(\mathcal{U}',\mathcal{V}')$ tel que $x \in \mathcal{V}'$, on a:

$$\lfloor \Psi,\Psi^{-1}(x) \rfloor = \lfloor \phi , \phi^{-1}(x) \rfloor * \lfloor \phi^{-1} \circ \Psi,\Psi^{-1}(x) \rfloor$$

donc $$\mu(\lfloor \phi , \phi^{-1}(x) \rfloor) = \mu(\lfloor \Psi,\Psi^{-1}(x) \rfloor).$$

C.2) Montrons que $\P$ possède un inverse: Posons en effet, pour $\lfloor \phi,x \rfloor \in D(M)$, que

$$N^{-1}(\lfloor \phi,x \rfloor) = \phi(x)$$

alors N^{-1}: $D(M) \longrightarrow M$ se factorise à travers:

$$\mu: D(M) \twoheadrightarrow M(D(M))$$

parce que si $\mu(\lfloor \phi,x \rfloor) = \mu(\lfloor \Psi,y \rfloor)$, il existe $\lfloor f,x \rfloor \in R_F$ tel que

$$\lfloor \phi,x \rfloor = \lfloor \Psi,f(x) \rfloor * \lfloor f,x \rfloor,$$

où $y = f(x)$. Mais ceci entraîne que

$$\phi = \Psi \circ f$$

sur un voisinage de x, donc

$$\begin{aligned} N^{-1}(\lfloor \Psi , y \rfloor) &= \Psi(y) \\ &= \Psi(f(x)) \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

On conclue qu'il existe Π^{-1}:

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[d, two heads, "\mu"'] \arrow[rd, "N^{-1}"] & \\ M(D(M)) \arrow[r, dashed, "\P^{-1}"'] & M \end{tikzcd}$$

continue. $\P^{-1}$ est bien l'inverse de $\P$ parce que

$$\begin{aligned} \P^{-1} \circ \P(x) &= \P^{-1} \circ \mu(\lfloor \phi , \phi^{-1}(x) \rfloor) \\ &= N^{-1}(\lfloor \phi , \phi^{-1}(x) \rfloor) \\ &= \phi \circ \phi^{-1}(x) \\ &= x \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \P \circ \P^{-1}(y) &= \mu(\lfloor \phi , \phi^{-1}(\P^{-1}(y)) \rfloor) \\ &= y \end{aligned}$$

Nous allons montrer que N^{-1} est un homéomorphisme local. Comme μ est aussi un homéomorphisme local, on concluera que $\P^{-1}$ est un homéomorphisme local bijectif donc $\P$ est un homéomorphisme.

On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{U,V\in O(X)} D_M(U,V) \times U \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[dr, "EV"'] & D(M) \arrow[d, "N^{-1}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

où EV: $\displaystyle\sum_{U,V\in O(X)} D_M(U,V) \times U \longrightarrow M$ envoie (ϕ,x) dans $\phi(x)$.

EV est un homéomorphisme local parce que $EV|_{\{\phi\}\times U'} : \{\phi\} \times U' \longrightarrow \phi(U'$ où $\phi \in D_M(U,V)$ et $U' \hookrightarrow U$, est un homéomorphisme entre $\{\phi\} \times U'$ un ouvert de $\displaystyle\sum_{U,V\in O(X)} D_M(U,V) \times U$ et un ouvert $\phi(U')$ de M. Comme k est aussi un homéomorphisme local, N^{-1} est un homéomorphisme local.

C.3) $\P$ préserve la structure de variété différentielle; en effet:

a) si $U \xrightarrow{\phi} V$ est un difféomorphisme, de U un ouvert de R_0 vers V un ouvert de M, alors $\P|_V \circ \phi$ est un difféomorphisme de U vers $\P(V)$ [$\P(v)$ ouvert de $M(D(M))$] puisque $\P|_V \circ \phi$ peut se factoriser comme suit:

$$\begin{tikzcd}
D(M) \arrow[r, two heads] & M(D(M)) \\
U \arrow[u, "\bar{\Psi}"] \arrow[r, "\P|_V \circ \phi"] & \P(V), \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

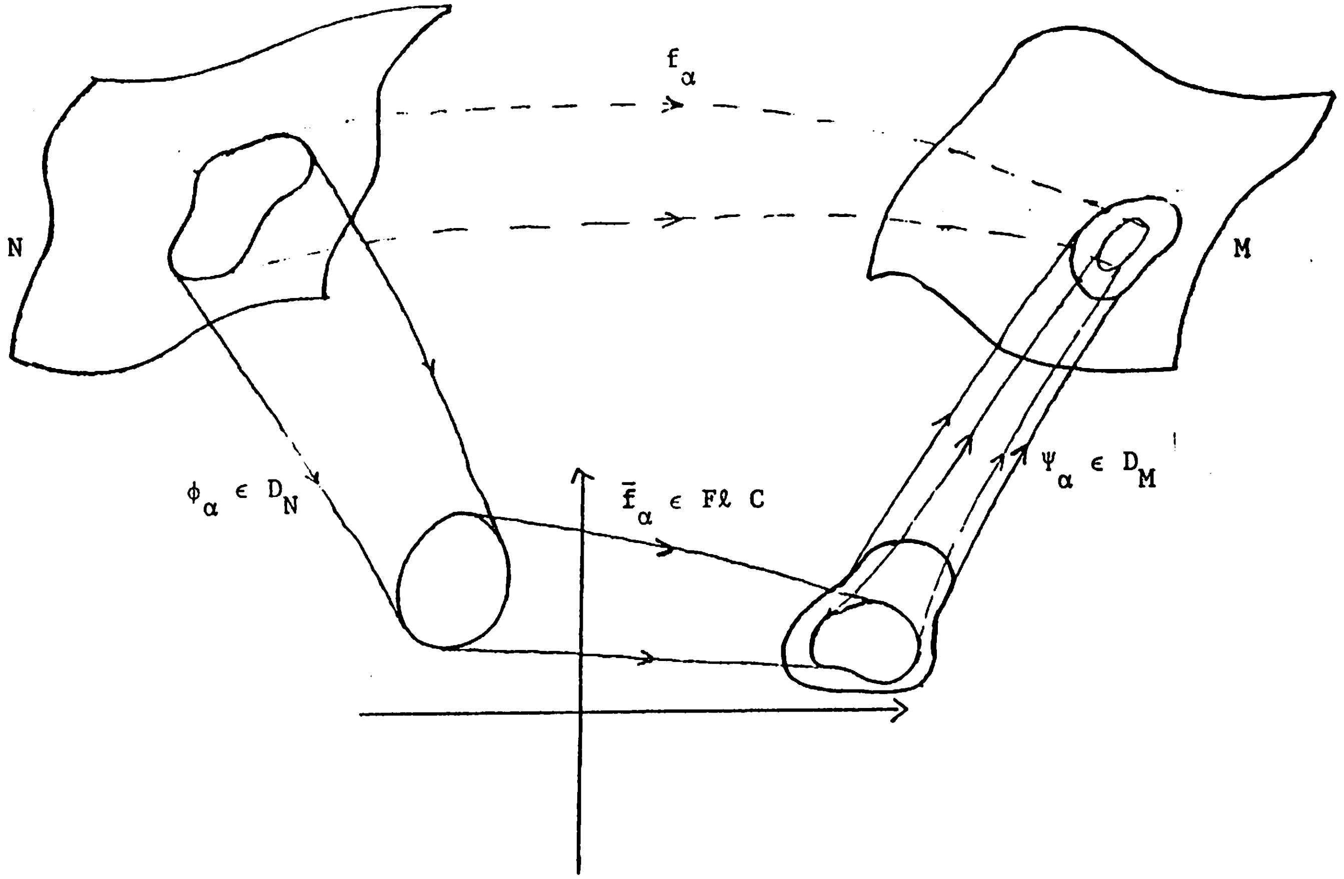
où $\bar{\Psi}(x) := \lfloor \phi,x \rfloor$ est une section continue de P [$\mu \circ \bar{\Psi}$ est injectif].

D. On peut montrer facilement que D est isomorphe à $D(M(D))$ en s'inspirant de la démonstration du théorème 2.

Et ceci achève notre démonstration.

4.3 Comme les variétés différentielles sont maintenant décrites en terme du groupoïde topologique R, on peut chercher à caractériser, en terme de R, les fonctions différentiables entre variétés différentielles. Eventuellement, nous décrirons ainsi toutes les constructions de la géométrie différentielle.

Traditionnellement, une fonction différentiable f entre deux variétés différentielles N et M est obtenue par recollement d'une famille "compatible" de fonctions obtenues comme:



où ϕ_α et Ψ_α sont des "difféomorphismes", et où les $\bar{f}_\alpha$ sont des fonctions différentiables.

Nous porterons en conséquence un intérêt très spécial à la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les ouverts de R_0 et les flèches les fonctions différentiables entre ces ouverts. De plus, remarquons que la restriction d'une fonction différentiable à un ouvert est encore différentiable, et que le recollement de fonctions différentiables est différentiable. Il sera donc encore une fois possible de ramener la donnée de $\mathcal{C}$ à la donnée d'une "catégorie topologique" C, c'est-à-dire:

a) $C_o = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n = R_o$

b) C_F est l'espace topologique des germes de fonctions différentiables de R_0 vers R_0, i.e.:

$$C_F = \sum_{U,V\in O(R_0)} C(U,V) \times U/\equiv,$$

où $\equiv$ est définie de la façon habituelle.

c) δ^1: $C_F \longrightarrow C_0$ est la fonction continue définie en posant:

$$\delta^1(\lfloor f,x \rfloor) = x$$

d) δ^o: $C_F \longrightarrow C_0$ est celle définie en posant:

$$\delta^o(\lfloor f,x \rfloor) = f(x)$$

e) u: $C_0 \longrightarrow C_F$ est la fonction définie en posant:

$$u(x) = \lfloor 1_{C_0}, x \rfloor$$

f) m: $C_F \underset{C_0}{\times} C_F \longrightarrow C_F$ enfin est définie en posant:

$$(\lfloor q, f(x) \rfloor, \lfloor f,x \rfloor) = \lfloor q \circ f, x \rfloor$$

4.4 Pour simplifier la suite de notre démarche, nous introduirons les concepts de relateurs et de distributeurs dans la catégorie des espaces topologiques. Les structures de groupoïde topologique, de catégorie topologique et d'espace étalé sont en effet définissables en termes de ces concepts. Et nous en arriverons à montrer que toutes les constructions de la géométrie différentielle se définissent au moyen de distributeurs.

CHAPITRE II

1. Relateurs

1.2 Un relateur, dans la catégorie des espaces topologiques, est la donnée d'une paire de flèches:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

dans TOP. Nous désignerons ce relateur par $A \xRightarrow{R} B$; cette notation sera justifiée dans ce qui suit par le fait que les relateurs deviendront les flèches d'une bi-catégorie. R sera dit local sur la source (resp. but) si r_1 (resp. r_2) est un homéomorphisme local.

Deux relateurs $A \xRightarrow{R} B$ et $B \xRightarrow{S} C$ peuvent être "composés", en posant $S \circ R = R \underset{B}{\times} S$, c'est-à-dire:

$$\begin{tikzcd} & & R \underset{B}{\times} S \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & R \arrow[dl] \arrow[dr] & & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B & & C \end{tikzcd}$$

un pull-back, qui donne un relateur

$$\begin{tikzcd} & R \underset{B}{\times} S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & C \end{tikzcd}$$

Comme on peut définir le relateur particulier $A \xRightarrow{A} A$ de la façon suivante:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & \\ A & & A \end{tikzcd}$$

et comme la "composition" définie ci-haut est associative à isomorphisme près, on peut définir une bi-catégorie dont:

A. Les objets sont les espaces topologiques.

B. Les 1-flèches sont les relateurs entre espaces topologiques:

a) Nous aurons pour le relateur $A \overset{R}{\dashrightarrow} B$ que

$$\mathrm{SOURCE}(R) = A$$

$$\mathrm{BUT}(R) = B$$

b) La flèche identité sera: $A \xRightarrow{A} A$ définie ci-haut.

C. La composition entre 1-flèches est définie comme ci-haut.

D. Les 2-flèches entre 1-flèches

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, Rightarrow, bend left, "R"{name=U}] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "S"'{name=D}] & B
\arrow[from=U, to=D, "\phi"]
\end{tikzcd}$$

sont les fonctions continues $R \xrightarrow{\phi} S$ telle que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\phi"] & \\
A & & B \\
& S \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

a) La composition des 2-flèches est la composition dans TOP.

b) L'unité des 2-flèches est l'unité au sens des fonctions continues.

E. On définit enfin une composition dite transversale entre les 2-flèches, en posant pour:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, Rightarrow, shift left=2, dashed, "R_1"] \arrow[r, Rightarrow, shift right=2, dashed, "S_1"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow \phi"] & B \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, Rightarrow, shift left=2, dashed, "R_2"] \arrow[r, Rightarrow, shift right=2, dashed, "S_2"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow \Psi"] & C \end{tikzcd}$$

que $\Psi \times \phi : R_2 \circ R_1 \longrightarrow S_2 \circ S_1$ est l'unique fonction continue qui rend commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & R_2 \circ R_1 \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr] \arrow[dddd, dashed, bend left=90, "\Psi \times \phi"] & \\
R_1 \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\phi"'] & & R_2 \arrow[dl] \arrow[dd, dashed, "\Psi"] \\
 & B & \\
S_1 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ul] \\
 & S_2 \circ S_1 \arrow[ul, "\Psi"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

L'existence et l'unicité d'une telle fonction étant assurée par le fait que $S_2 \circ S_1$ est un pull-back.

1.2 Exemples

A. Une catégorie topologique A n'est que la donnée d'un quadruplet (A_0, A_F, m, u), où:

A.1) A_0 est un espace topologique, dit espace des objets.

A.2) A_F est un relateur

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, Rightarrow, dashed, "A_F"] & A_0 \end{tikzcd}$$

qu'on peut encore décrire comme suit:

$$\begin{tikzcd} & A_F \arrow[dl, "\delta^1"'] \arrow[dr, "\delta^o"] & \\ A_0 & & A_0 \end{tikzcd}$$

A.3) u est une 2-flèche

$$A_0 \xrightarrow{u} A_F$$

A.4) m est enfin une 2-flèche:

$$A_F \circ A_F \xrightarrow{m} A_F$$

telle que l'on ait:

$$- m \circ (1_{A_F} \times m) = m \circ (m \times 1_{A_F})$$

$$- m \circ (1_{A_F} \times u) = m \circ (u \times 1_{A_F})$$

$$= 1_{A_F}$$

B. Un groupoïde topologique A n'est alors qu'une catégorie topologique A avec la donnée supplémentaire d'une 2-flèche

$$A_F \xrightarrow{i} A_F^{OPP},$$

où A_F^{OPP} est le relateur opposé:

$$\begin{tikzcd} & A_F \arrow[dl, "\delta^o"'] \arrow[dr, "\delta^1"] & \\ A_0 & & A_0 \end{tikzcd}$$

i devant vérifier:

$$m \circ [1_{A_F}, i] = u \circ \delta^1.$$

C. On a le groupoïde topologique trivial **1**, pour lequel l'objet des objets et l'objet des flèches sont tous deux l'objet terminal de TOP. δ', δ^o, u, m et i sont alors les flèches évidentes.

2. Distributeur

2.1 Un distributeur $A \overset{D}{\Longrightarrow} B$, entre deux catégories topologiques A et B, est la donnée:

A.1) D'un relateur $A_0 \overset{D}{\Longrightarrow} B_0$, que l'on appellera relateur sous-jacent à D:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_0 & & B_0 \end{tikzcd}$$

A.2) Et de 2-flèches:

i) m^{1}_{D} la "composition sur la source" de D:

$$D \circ A_F \xrightarrow{m^{1}_{D}} D$$

ii) m^{o}_{D} la "composition sur le but" de D:

$$B_F \circ D \xrightarrow{m^{o}_{D}} D$$

Remarque

Plus simplement m^{1}_{D} et m^{o}_{D} seront souvent désigné par m, et m(f,g) deviendra $f \circ g$.

Telles que les 2-flèches m^{o}_{D} et m^{1}_{D} vérifient les identités suivantes:

B.1) $m^{1}_{D} \circ (1_D \times u) \cong 1_D$, c'est-à-dire que u est une "unité" pour m^{1}_{D} (u est l'unité de A).

B.2) $m^{o}_{D} \circ (u \times 1_D) \cong 1_D$, c'est-à-dire que u est une "unité" pour m^{o}_{D} (u est l'unité de B).

B.3) $m^{1}_{D} \circ (1_D \times m) = m^{1}_{D} \circ (m^{1}_{D} \times 1_{A_F})$, c'est-à-dire que m^{1}_{D} est "associative" à gauche (ici m désigne la composition de A).

B.4) $m^o_D \circ (m \times 1_D) = m^o_D \circ (1_{B_F} \times m^o_D)$, c'est-à-dire que m^o_D est "associative" à droite (et m désigne la composition de B).

B.5) $m^1_D \circ (m^o_D \times 1_{A_F}) = m^o_D \circ (1_{B_F} \times m^1_D)$, c'est-à-dire que m^1 et m^o sont compatibles.

2.2 Exemples

A. Si A est une catégorie topologique, alors on a un distributeur $A \xRightarrow{1_A} A$, dit identité de A, caractérisé par:

A.1) Le relateur $A_0 \xRightarrow{A_F} A_0$

A.2) Et la 2-flèche

$$A_F \circ A_F \xrightarrow{m} A_F$$

qui joue à la fois ce rôle de $m^o_{1_A}$ et $m^1_{1_A}$.

Les conditions qui font que 1_A est un distributeur sont alors les conditions qui font que A est une catégorie.

B. La catégorie topologique C (décrite en section II.6.A), des germes de fonctions différentiables entre points de R_0, donne lieu à un distributeur:

$$R \xRightarrow{C} R$$

a) dont le relateur sous-jacent est:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\delta^1"'] \arrow[dr, "\delta^o"] & \\ R_0 & & R_0 \end{tikzcd}$$

b) et dont les multiplications sont:

$$m^1_C \colon\ C \circ R_F \hookrightarrow C \circ C \xrightarrow{m} C$$

$$m^o_C \colon\ R_F \circ C \hookrightarrow C \circ C \xrightarrow{m} C$$

où les inclusions ci-haut sont construites au moyen de $R_F \hookrightarrow C$.

C. En vertu du Théorème 2., on peut affirmer que la donnée d'une variété différentielle est équivalente à la donnée d'un distributeur local sur la source:

$$R \xRightarrow{D} 1$$

qui est R-fidèle (nous définirons ci-dessous ce que signifie R-fidèle).

En effet, un tel distributeur n'est autre chose que la donnée:

a) d'un relateur:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr] & \\ R_0 & & 1 \end{tikzcd}$$

tel que P soit un homéomorphisme local.

b) et d'une "composition" sur la source:

$$*: \ D \circ R_F \longrightarrow D$$

puisque la "composition" sur le but est trivial (c'est l'identité de D). Et alors, les conditions du Théorème 2., sont vérifiées sauf la condition:

$$(\phi * f = \phi * q) \Longrightarrow (f = q)$$

mais ceci sera assuré par le fait que D est R-fidèle.

2.3 Un distributeur $A \xRightarrow{D} B$ est dit A-fidèle [resp. B-fidèle], si et seulement si on a:

Pour $\phi \in D$ et $(f,q) \in (A_F \times A_F)$, que $\phi \circ f = \phi \circ q$ entraîne que $f = q$.

[Resp.: pour $\phi \in D$ et $(b,k) \in (B_F \times B_F)$, que $h \circ \phi = k \circ \phi$ entraîne que $h = k$.]

2.4 Remarque sur la représentation de distributeurs

A. Les éléments $f \in D$, où

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "d_A"'] \arrow[dr, "d_B"] & \\ A_0 & & B_0 \end{tikzcd}$$

est le relateur sous-jacent à un distributeur $a \overset{D}{\dashrightarrow} B$, seront souvent les germes de fonctions entre A_0 et B_0; en conséquence, nous symboliserons par

$$a \cdot \xrightarrow{f} \cdot\ b$$

un élément de D, si $d_A(f) = a$ et $d_B(f) = b$.

La "composition" sur la source de D se symbolise alors comme véritable composition:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f \in D"] & & b \\ a' \arrow[u, "h \in A_F"] \arrow[urr, dashed, "f \circ h \in D"'] & & \end{tikzcd}$$

Où $h \in A_F$ est symbolisé par $a' \cdot \xrightarrow{h} \cdot\ a$ quand $\delta^1(h) = a'$ et $\delta^0(h) = a$.

De même la "composition" sur le but est symbolisé comme:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f \in D"] \arrow[drr, dashed, "k \circ f \in D"'] & & b \arrow[d, "k \in B_F"] \\ & & b' \end{tikzcd}$$

Où k est un élément de B_F tel que $\delta^1(k) = b$ et $\delta^0(k) = b'$.

B. On en vient alors à définir une catégorie $\mathcal{D}(D)$, que nous appellerons ce diagramme de D, en posant que:

B.1) Un objet de $\mathcal{D}(D)$ est

$$a \xrightarrow{f} b \in D.$$

B.2) Une flèche de $\mathcal{D}(D)$ entre deux tels objets, est un couple $(h,k) \in A_F \times B_F$ tel que commute le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "k"] \\
a' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & b'
\end{tikzcd}$$

ce qui veut dire que:

$$f' = k \circ f \circ h$$

B.3) L'identité d'un objet

$$a \xrightarrow{f} b$$

est alors la flèche (u(a),u(b)):

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop left, "u(a)"] \arrow[r, "f"] & b \arrow[loop right, "u(b)"]
\end{tikzcd}$$

B.4) La composition est la composition point-wise, i.e.:

pour

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "k"] \\
a' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & b'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[d, "k'"] \\
a'' \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "f''"'] & b''
\end{tikzcd}$$

on a $(h,k) \circ (h',k') = (h \circ h',k' \circ k)$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "k' \circ k"] \\
a'' \arrow[u, "h \circ h'"] \arrow[r, "f''"'] & b''
\end{tikzcd}$$

2.5 Pour pouvoir décrire la notion de fonction différentiable entre variétés différentielles, par exemple, il nous faudra maintenant définir les notions de:

- morphisme entre distributeurs.
- composition des distributeurs, qui pour C et D des distributeurs sera désignée par $C \bullet D$.
- et composition transversale pour les morphismes entre distributeurs, qui pour f et q deux tels morphismes sera désignés par $f \bullet q$.

Alors une fonction différentiable deviendra un morphisme

$$D_1 \xrightarrow{f} D_2 \bullet C$$

entre des distributeurs D_1 et $D_2 \bullet C$, où $R \overset{D_1}{\Longrightarrow} 1$ et $R \overset{D_2}{\Longrightarrow} 1$ seront des distributeurs représentant deux variétés. Le distributeur C a été décrit en section 4, du présent chapitre.

On obtiendra le composé de deux fonctions différentiables:

$$D_1 \xrightarrow{f} D_2 \bullet C$$

et

$$D_2 \xrightarrow{q} D_3 \bullet C$$

en effectuant

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[drr, dashed, "q \circ f"'] & D_2 \bullet C \arrow[r, "q \bullet C"] & D_3 \bullet C \bullet C \arrow[d, "1_{D_3} \bullet m"] \\
 & & D_3 \bullet C
\end{tikzcd}$$

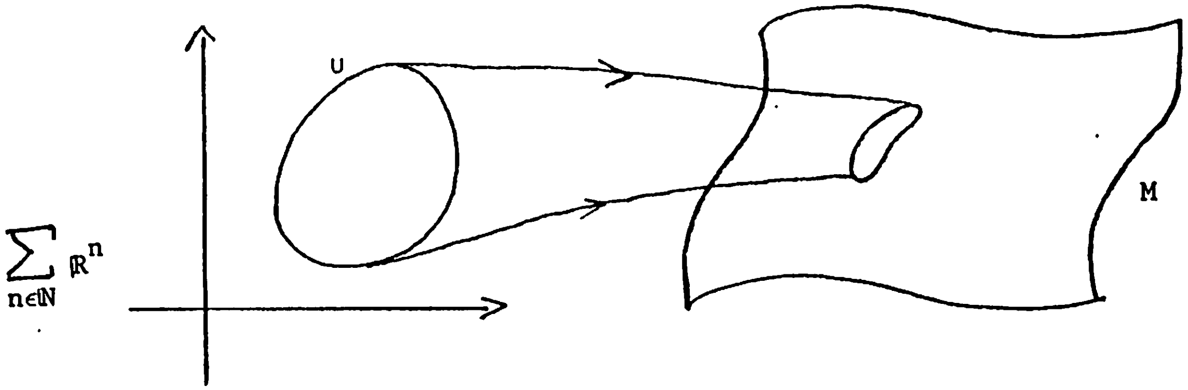
où m: $C \bullet C \longrightarrow C$ sera un certain morphisme de distributeur obtenu à partir de la composition de C.

Enfin, l'identité pour cette composition sera elle aussi décrite de façon analogue.

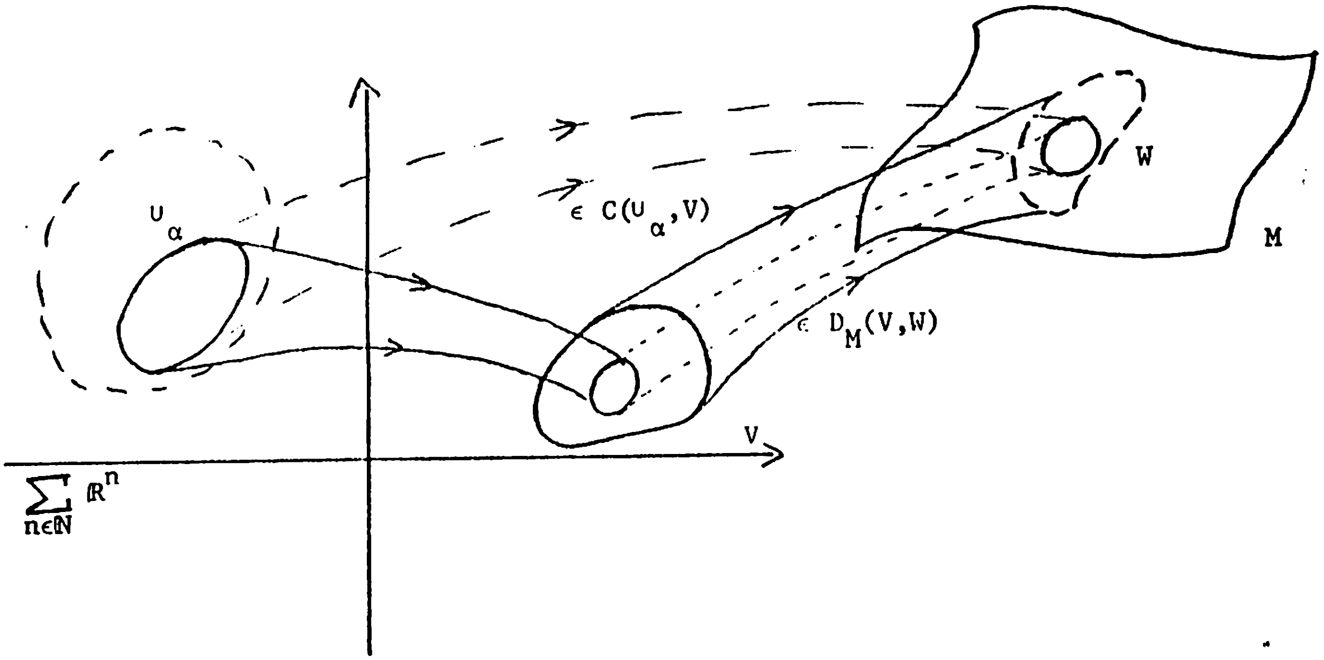
CHAPITRE III

1. Fonctions différentiables

1.1 Pour obtenir les fonctions différentiables entre deux variétés différentielles N et M, on construit d'abord les fonctions différentiables entre les ouverts de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et ceux de M:

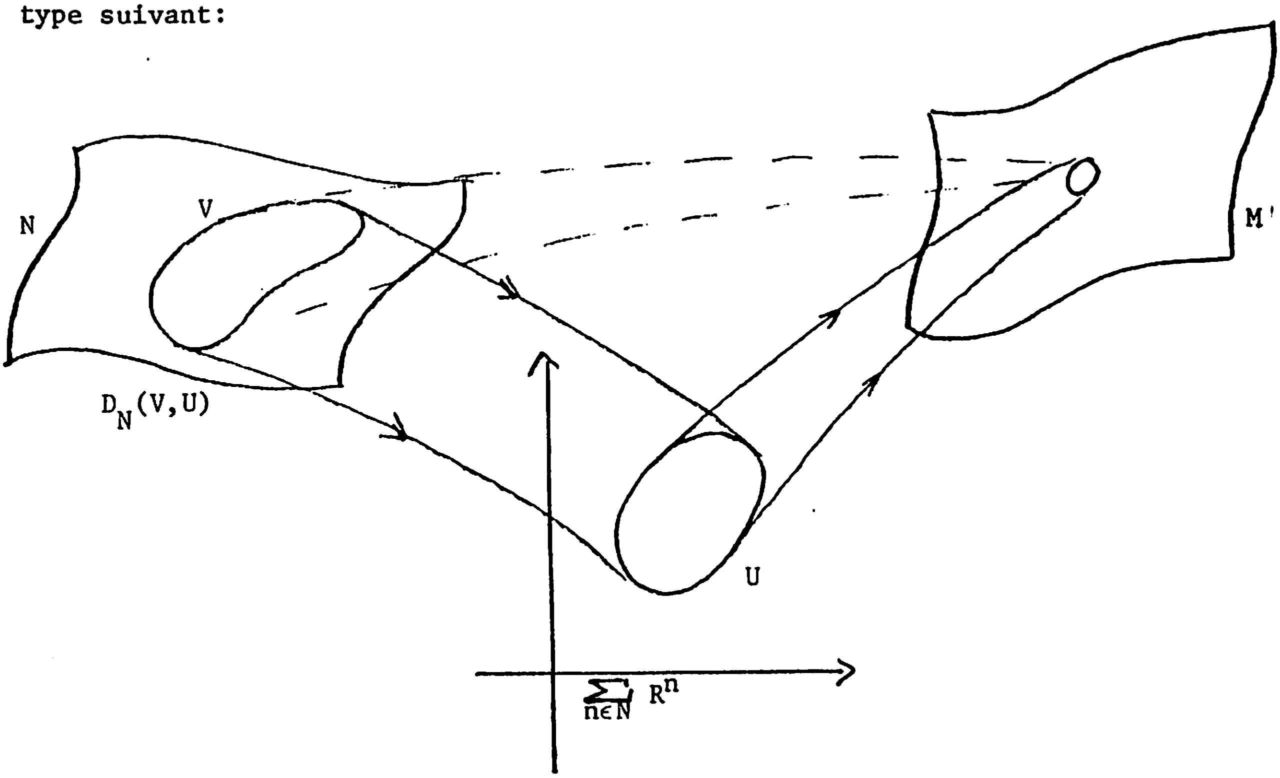


Or, une telle fonction est obtenue elle-même par recollement d'une famille compatible de fonctions différentiables du type suivant:



c'est-à-dire: le composé d'une fonction différentiable, entre ouverts de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, et d'un difféomorphisme entre un ouvert de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et un ouvert de M.

Et une fonction différentiable entre N et M, deux variétés différentielles, est obtenue par recollement d'une famille compatible de fonctions du type suivant:

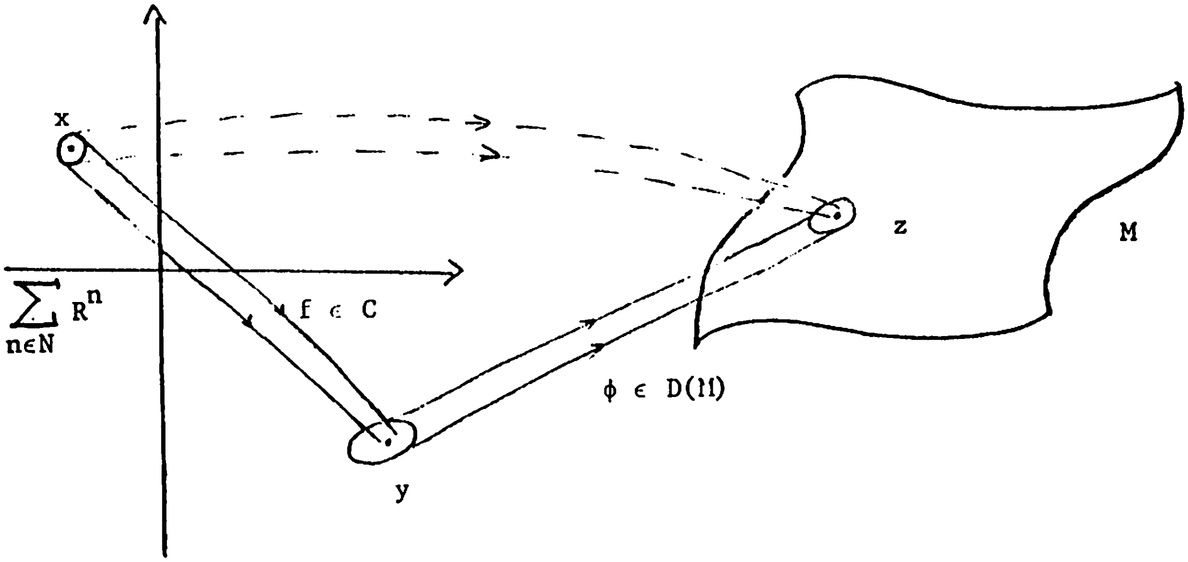


c'est-à-dire: le composé d'un difféomorphisme, entre un ouvert de N et un ouvert de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, et d'une fonction différentiable entre cet ouvert de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et un ouvert de M.

1.2 Si nous voulons réexprimer ces constructions en terme de germes, il suffit de remarquer:

> qu'un germe de fonction différentiable entre un point x de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et un point z de M est obtenu en composant un germe de fonction différentiable f, entre le point x et un point y de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, avec un germe de

difféomorphisme ϕ entre y et z:



on peut composer: $f \in C$ [voir III.4.B] et $\phi \in D(M)$ [voir II.4.A] si

$$\delta^o(f) = P(\phi).$$

Et l'ensemble de germes de fonctions différentiables entre points de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ et points de M, est obtenu comme quotient de D(M) o C par la relation d'équivalence $\approx$ définie en posant:

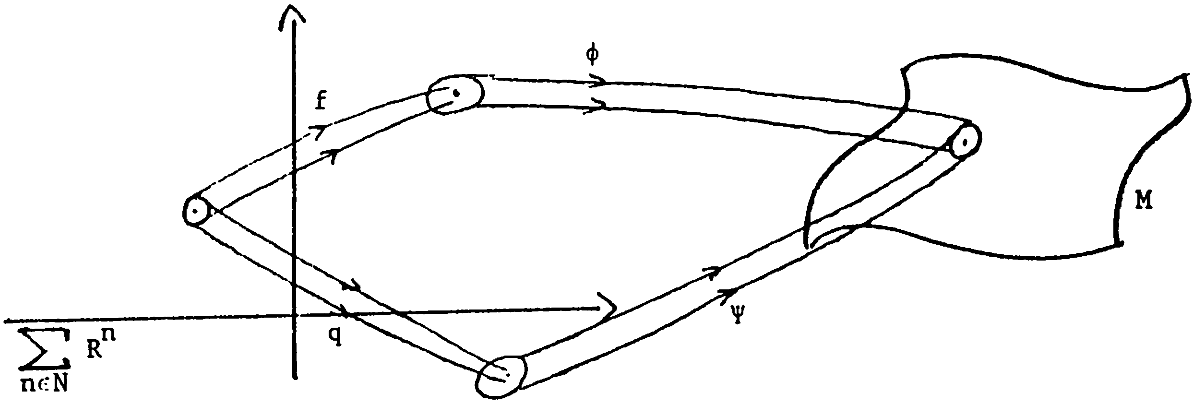
$$(\phi, f) \approx (\Psi, q)$$

si et seulement si, il existe un germe de difféomorphisme $\xi \in R_F$ tel que:

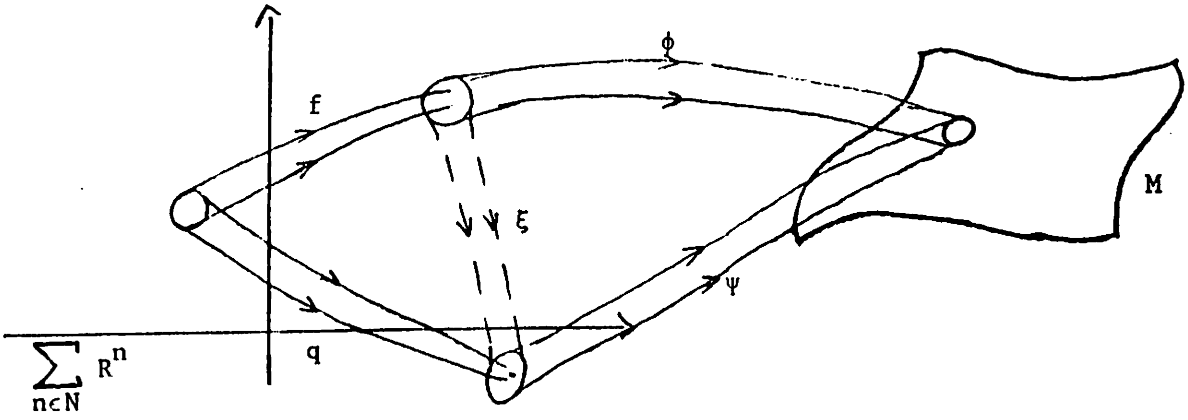
$$\xi \circ q = f \quad \text{et} \quad \phi \circ \xi = \Psi.$$

L'introduction de cette relation d'équivalence est rendue nécessaire par le fait que plusieurs couples de germes (ϕ,f), où $\phi \in D(M)$, $f \in C$ et $\delta^o(f) = P(\phi)$, peuvent représenter le même germe de fonctions différentiables:

Le diagramme suivant commutte en effet si et seulement si



il existe $\xi \in R_F$, nécessairement unique, qui rend commutatif le diagramme



Nous désignerons par $\phi \cdot f$ la classe d'équivalence de (ϕ,f) suivant $\approx$, 1.3 Si l'on désigne par $D(M) \bullet C$ l'ensemble $D(M) \circ C/\approx$ et si on définie:

A. La fonction continue:

$$D(M) \bullet C \xrightarrow{\delta^1} R_0$$

en posant pour la classe d'équivalence $\phi\cdot f$ de (ϕ,f), que

$$\delta^1(\phi \bullet f) = \delta^1(f).$$

[Ceci a du sens puisque $(\phi,f) \approx (\psi,q)$ entraîne que $\delta^1(f) = \delta^1(q)$]. On aura caractérisé un relateur $R_J \overset{D(M)\bullet C}{\Longrightarrow} 1$.

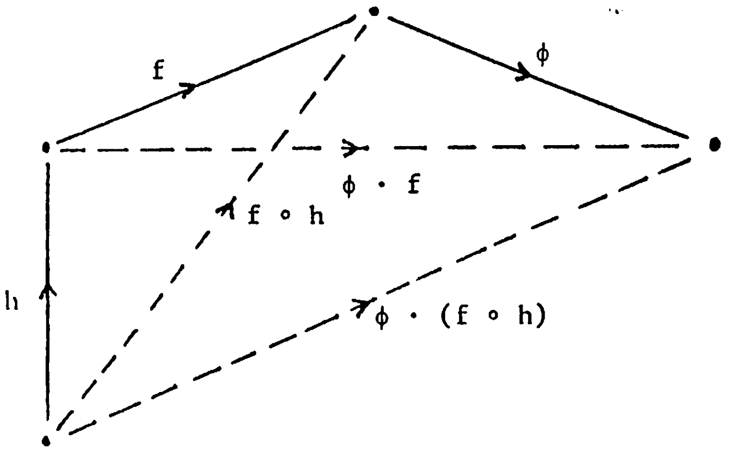
B. Et la "composition" sur la source

$$m^1 : (D(M)\bullet C) \circ R_F \longrightarrow D(M) \bullet C$$

en posant, pour $\phi\cdot f \in D(M) \bullet C$ et $h \in R_F$, que:

$$m^1((\phi\cdot f , h) = \phi\cdot(f \circ h)$$

c'est-à-dire en termes de diagramme:



On aura fait de $D(M) \bullet C$ un distributeur

$$R \overset{D(M)\bullet C}{\Longrightarrow} 1$$

qu'on appellera le composé de D(M) et de C.

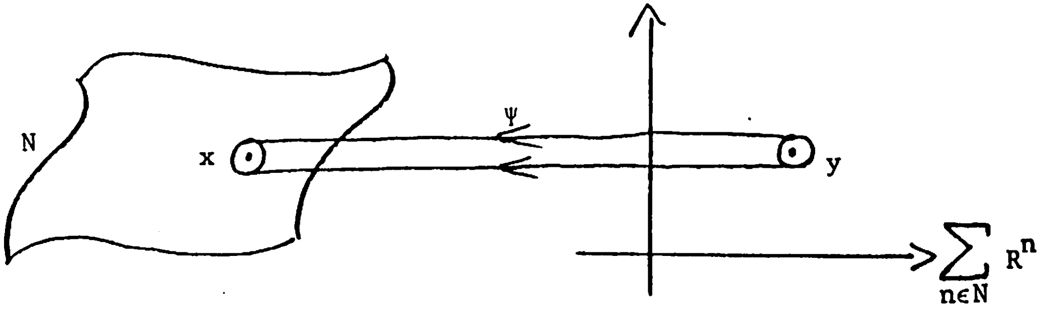
C. On peut alors décrire une fonction différentiable entre N et M comme étant une fonction continue f: D(N) ———> D(M) ● C telle que:

$$\begin{tikzcd}
 & D(N) \arrow[ld] \arrow[d, "f"] \\
R_O & D(M) \bullet C \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

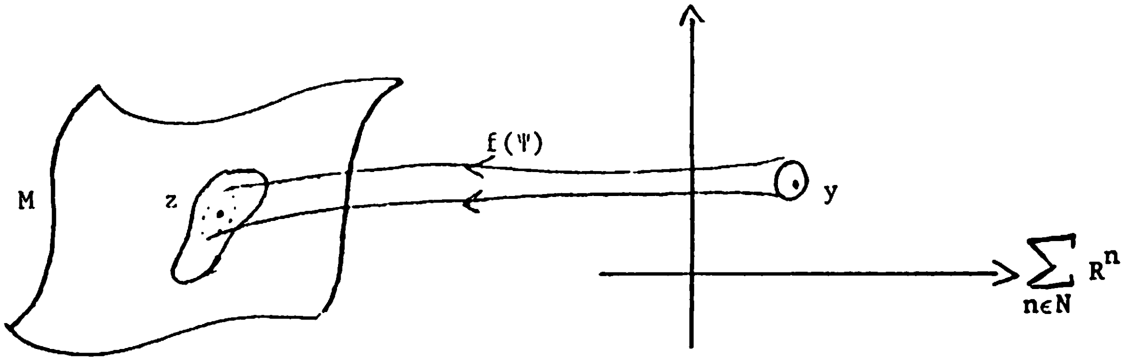
soit un diagramme commutatif, et telle que:

$$m^1 \text{ o } (f \times 1_{R_F}) = f \circ m^1$$

Cette fonction associe à chaque germe:



de difféomorphisme Ψ ∊ D(N), un germe de fonctions différentiables:



et ce d'une façon compatible. On peut donc obtenir la fonction différentiable $N \xrightarrow{f} M$ en "recollant" les germes $f(\Psi) \circ \Psi^{-1}$.

2. Morphisme de distributeur

Soit $A \overset{D}{\underset{E}{\rightrightarrows}} B$ deux distributeurs, alors on appelle morphisme de distributeur une 2-flèche $D \xrightarrow{f} E$, entre les relateurs D et E respectivement sous-jacent aux distributeurs D et E:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\ A_0 & & B_0 \\ & E \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

telle que:

- $m^1(f \times 1_{A_F}) = f \circ m^1$

- $m^0 \circ (1_{B_F} \times f) = f \circ m^0$

c'est-à-dire, en termes de diagrammes, que:

- pour $\xi \in A_F$ et $\phi \in D$, on a que commute:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f(\phi)"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "f(\phi \circ \xi)"'] & \end{tikzcd}$$

- pour $\P \in B_F$ et $\phi \in D$ on a que commute:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f(\phi)"] \arrow[dr, "f(\P \circ \phi)"'] & \bullet \arrow[d, "\P"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

On compose ces morphismes de la même façon qu'on compose les 2-flèches entre relateurs:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, bend left=90] & \\
A_0 & E \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "q"] & B_0 \\
 & F \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ceci a du sens parce que

$$q \circ f \circ m^1 = q \circ m^1 \circ (f \times 1_{A_F})$$

$$= m^1 \circ (q \times 1_{A_F}) \circ (f \times 1_{A_F})$$

$$= m^1 \circ ((q \circ f) \times 1_{A_F})$$

de même $(q \circ f) \circ m^0 = m^0 \circ (1_{B_F} \times (q \circ f))$

3. <u>Composition de distributeurs</u>

Pour $A \xRightarrow{D} B$ et $B \xRightarrow{E} C$ des distributeurs nous définirons le composé: $A \xRightarrow{E\bullet D} C$ comme étant le distributeur dont:

I) Le relateur sous-jacent

$$A_0 \xRightarrow{E\bullet D} C_0$$

est le co-noyau des flèches

$$\begin{tikzcd}
E \circ B_F \circ D \arrow[r, shift left, "1_E \times m"] \arrow[r, shift right, "m \times 1_D"'] & E \circ D
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que les éléments de $E \bullet D$ sont des classes d'équivalences de couples (e,d), où le "but" de d est la "source" de e:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "d"] & \bullet \arrow[r, "e"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

où l'on a identifié deux tels couples:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "e_1"] & \\
\bullet \arrow[ur, "d_1"] \arrow[dr, "d_2"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "e_2"'] &
\end{tikzcd}$$

si, il existe un $f \in B_F$ tel que commute:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "e_1"] \arrow[dd, dashed, "f"] & \\
\bullet \arrow[ur, "d_1"] \arrow[dr, "d_2"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "e_2"'] &
\end{tikzcd}$$

II) On peut alors définir $(E \bullet D) \circ \Lambda_F \xrightarrow{m^1} E \bullet D$ et encore $B_F \circ (E \bullet D) \xrightarrow{m^o} E \bullet D$, en posant, du point de vue des diagrammes associés à E et D, que:

- pour $f \in \Lambda_F$ et $e \cdot d \in E \bullet D$, on ait:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "e"] & \\
\bullet \arrow[ur, "d"] \arrow[rr, "e \cdot d"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "f"] \arrow[uur, dashed, "d \circ f"'] \arrow[urr, dashed, "e \cdot (d \circ f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

[Remarque: e · d désigne la classe d'équivalence de (e,d).]

i.e.: $(e \cdot d) \circ f = e \cdot (d \circ f)$

- pour $k \in B_F$ et $e \cdot d \in E \bullet D$:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, dashed, "k \circ e"] & \\
\bullet \arrow[ur, "d"] \arrow[rr, "e \cdot d"] \arrow[drr, dashed, "(k \circ e) \cdot d"'] & & \bullet \arrow[d, "k"] \\
 & & \bullet
\end{tikzcd}$$

i.e.: $k \circ (e \cdot d) = (k \circ e) \cdot d$

[On remarque que ces définitions sont compatibles avec les identifications que nous avons faites entre les couples (e,d).]

Cependant, pour montrer la continuité de m^1 et m^o il faudra poser certaines conditions sur les distributeurs E et D. Nous étudions ces conditions dans le paragraphe suivant.

3.2 Pour pouvoir composer les distributeurs $A \overset{D}{\Longrightarrow} B$ et $B \overset{E}{\Longrightarrow} C$, il faut donc construire des 2-flèches continues $(E \bullet D) \circ A_F \xrightarrow{m^1} E \bullet D$ et $C_F \circ (E \bullet D) \xrightarrow{m^o} E \bullet D$ telles que commutent les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
(E \circ B_F \circ D) \circ A_F \arrow[r, shift left, "M^o \times 1_{A_F}"] \arrow[r, shift right, "M^1 \times 1_{A_F}"'] \arrow[d, "\|"'] & (E \circ D) \circ A_F \arrow[r, "K \times 1_{A_F}"] \arrow[d, "\|"] & (E \bullet D) \circ A_F \arrow[d, dashed, "m^1"] \\
E \circ B_F \circ D \arrow[r, shift left, "m^o"] \arrow[r, shift right, "m^1"'] & E \circ D \arrow[r, two heads, "K"] & E \bullet D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_F \circ (E \circ B_F \bullet D) \arrow[r, shift left, dashed, "1_{C_F} \times M^0"] \arrow[r, shift right, dashed, "1_{C_F} \times M^1"'] \arrow[d, "\Pi"'] & C_F \circ (E \circ D) \arrow[r, two heads, "1_{C_F} \times K"] \arrow[d, "\Pi"'] & C_f \circ (E \bullet D) \arrow[d, dashed, "m^0"] \\
E \circ B_F \circ D \arrow[r, shift left, "M^0"] \arrow[r, shift right, "M^1"'] & E \circ D \arrow[r, two heads, "K"] & E \bullet D
\end{tikzcd}$$

où $M^0 = 1_E \times m_D^0$, $M^1 = m_E^1 \times 1_D$ et $K = \text{COKER}(M^0, M^1)$.

Si $E \bullet D$ est un quotient universel de $E \circ D$, alors on peut assurer la continuité de m^1 et m^0;

Rappelons que: $X \xrightarrow{K} \!\!> Y$ fait de Y un quotient universel de X si:

I) K fait de Y un quotient de X [i.e.: lorsque V est un sous-ensemble de Y dont l'image inverse par K est un ouvert de X, alors V est ouvert de Y.]

II) Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, two heads, "K"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

et toute flèche $Z \longrightarrow A$, on a que la flèche [obtenue de façon évidente]:

$$Z_A \times X \longrightarrow Z_A \times Y$$

fait de $Z_A \times Y$ un quotient de $Z_A \times X$.

Les fonctions m^1 et m^0, définies en Section 3.2, sont continues. Montrons le pour m^1 soit U un ouvert de $E \bullet D$, alors $(m^1)^{-1}(U)$ est un ouvert de $(E \bullet D) \circ A_F$. En effet, l'image inverse de $(m^1)^{-1}(U)$ par $K \times 1_{A_F}$ est égale à $\Pi^{-1} \circ K^{-1}(U)$, $[k \circ \Pi = m^1 \circ (K \times 1_{A_F})]$ qui est ouvert parce que Π et K sont continues. Donc $(m^1)^{-1}(U)$ est ouvert parce que $K \times 1_{A_F}$ fait de $(E \bullet D) \circ A_F$ un quotient de $(E \circ D) \circ A_F$ [K fait de $E \bullet D$ un quotient universel de $E \circ D$].

La proposition suivante fournie des conditions suffisantes pour que $E \bullet D$ soit un quotient universel de $E \circ D$.

<u>Proposition 1</u>

Si les distributeurs $A \xRightarrow{D} B$, $B \xRightarrow{1_B} B$ et $B \xRightarrow{E} C$ sont locaux sur la source, alors

$$E \circ D \xrightarrow{K} \twoheadrightarrow E \bullet D$$

est un homéomorphisme local.

<u>Remarque</u>:

Une surjection ouverte $X \twoheadrightarrow Y$, fait toujours de Y un quotient universel de X, et un homéomorphisme local est une surjection ouverte.

<u>Démonstration</u>

La démonstration utilise le fait [Voir annexe topologique] que le pull-back d'un homéomorphisme local est un homéomorphisme local. Pour simplifier la manipulation des homéomorphismes locaux, nous écrirons $A \xrightarrow[(\ell)]{\alpha} B$ pour signifier que α est un homéomorphisme local.

On a :

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & B_F \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & E \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & \\
A_o & & B_o & & B_o & & C_o
\end{tikzcd}$$

si on forme les pull-back:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & E \circ B_F \circ D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & & \\
 & & B_F \circ D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & E \circ B_F \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & \\
 & D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & B_F \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & E \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & \\
A_o & & B_o & & B_o & & C_o
\end{tikzcd}$$

on obtient que le composé:

$$\begin{tikzcd}
E \circ B_F \circ D \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right, "\alpha"'] & B_F \circ D \arrow[r] & D \arrow[d] \\
 & & A_o
\end{tikzcd}$$

est un homéomorphisme local.

De même si on forme le pull-back:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \circ D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & \\
 & D \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & & E \arrow[dl, "(\ell)"'] \arrow[dr] & \\
A_o & & B_o & & C_o
\end{tikzcd}$$

on obtient que le composé

$$\begin{tikzcd}
E \circ D \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & D \arrow[d] \\
 & A_o
\end{tikzcd}$$

est un homéomorphisme local.

Comme le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
E \circ B_F \circ D \arrow[rr, shift left, "1_E \times m^o_D"] \arrow[rr, shift right, "m^1_E \times 1_D"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & & E \circ D \arrow[dl, "\beta"] \\
& A_o &
\end{tikzcd}$$

α et β étant des homéomorphismes locaux, on obtient que $1_E \times m^o_D$ et $m^1_E \times 1_D$ sont des homéomorphismes locaux ce qui entraîne que

$$K = \mathrm{COKER}(1_E \times m^o_D,\ m^1_E \times 1_D)$$

est un homéomorphisme local [Voir annexe topologique].

3.3 Ces conditions sont satisfaisantes puisque tous les distributeurs que nous avons construits jusqu'ici sont locaux sur la source. Cependant, la construction de l'espace topologique sous-jacent à une variété différentielle décrite au moyen d'un distributeur $R \xRightarrow{D} 1$, comme dans le Théorème 3 [Section I.4.2], est un cas de composition de distributeurs non locaux sur la source.

Remarquons que la donnée d'un espace topologique M est équivalente à la donnée d'un distributeur $1 \xRightarrow{M} 1$ dont le relateur et les compositions sur la source et le but sont définis de façon triviale.

Considérons le distributeur, $1 \xRightarrow{\omega} R$ tel que:

I) Le relateur sous-jacent à ω soit:

$$\begin{tikzcd}
& R_o \arrow[dl] \arrow[dr, "1_{R_o}"] & \\
1 & & R_o
\end{tikzcd}$$

11) La composition sur la source de ω soit la flèche triviale et la composition sur le but de ω soit 1_{R_o}.

Alors, en composant D et ω [si cela a du sens] on obtient l'espace sous-jacent à D. Or ω n'est pas local sur la source. Cependant on peut composer D et ω en vertu de la remarque suivante:

Remarque:

Pour $A \xRightarrow{D} 1$ et $1 \xRightarrow{E} A$, des distributeurs, on peut effectuer la composition:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, Rightarrow, "E"] \arrow[dr, dashed, "E \cdot D"'] & A \arrow[d, Rightarrow, "D"] \\
& 1
\end{tikzcd}$$

Ceci est presqu'évident puisque un distributeur $1 \xRightarrow{X} 1$ est tout simplement la donnée d'un espace topologique X, les compositions sur le but et la source étant triviales. Il suffit de poser $E \cdot D$ égale au quotient par la relation d'équivalente

$$\begin{tikzcd}
D \circ A_F \circ E \arrow[r, shift left, "1_D \times m_E^o"] \arrow[r, shift right, "m_D^1 \times 1_E"'] & D \circ E
\end{tikzcd}$$

et on obtient le distributeur cherché.

4. Composition de distributeur

4.1 Pour terminer le programme décrit en section II.2.5 définissons maintenant le composé transversal $q \bullet f$ de deux morphismes de distributeurs $D_1 \xrightarrow{f} E_1$ et $D_2 \xrightarrow{q} E_2$, où

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, Rightarrow, shift left, "D_1"] \arrow[r, Rightarrow, shift right, "E_1"'] & B
\end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd}
B \arrow[r, Rightarrow, shift left, "D_2"] \arrow[r, Rightarrow, shift right, "E_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

sont des distributeurs composables.

Comme f et q sont des morphismes de distributeur, on a le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
D_2 \circ B_F \circ D_1 \arrow[r, shift left, "m^1_{D_2} \times 1_{D_1}"] \arrow[r, shift right, "1_{D_2} \times m^0_{D_1}"'] \arrow[d, "q \times 1_{B_F} \times f"'] & D_2 \circ D_1 \arrow[d, "q \times f"] \\
E_2 \circ B_F \circ E_1 \arrow[r, shift left, "m^1_{E_2} \times 1_{E_1}"] \arrow[r, shift right, "1_{E_2} \times m^0_{E_1}"'] & E_2 \circ E_1
\end{tikzcd}$$

En conséquence, puisque $D_2 \bullet D_1$ et $E_2 \bullet E_1$ sont des co-noyaux pour les paires de flèches évidentes, il existe une et une seule flèche $D_2 \bullet D_1 \xrightarrow{q \bullet f} E_2 \bullet E_1$ qui rend commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
D_2 \circ B_F \circ D_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & D_2 \circ D_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & D_2 \bullet D_1 \arrow[d, dashed, "q \bullet f"] \\
E_2 \circ B_F \circ E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E_2 \circ E_1 \arrow[r, two heads] & E_2 \bullet E_1
\end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que $q \bullet f$ ainsi définie est un morphisme de distributeurs.

4.2 Applications

A.) Si $D_1 \xrightarrow{f} D_2 \bullet C$ et $D_2 \xrightarrow{q} D_3 \bullet C$ caractérisent des fonctions différentiables entre des variétés différentielles $R \xRightarrow{D_1} 1$ et $R \xRightarrow{D_2} 1$ [Voir Section 4.3.C], alors on peut définir le composé

$$D_1 \xrightarrow{q*f} D_3 \bullet C$$

en posant que q*f est le composé

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, dashed, "q*f"'] & D_2 \bullet C \arrow[r, "q \bullet 1_C"] & (D_3 \bullet C) \bullet C \arrow[d, "1_{D_3} \bullet m"] \\
 & & D_3 \bullet C
\end{tikzcd}$$

où m est l'unique morphisme de distributeur tel que commute le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
C \circ R_F \circ C \arrow[r, shift left, "1_C \times m"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "1_c \times m"'] & C \circ C \arrow[r] \arrow[d, "m"] & C \bullet C \arrow[d, dashed, "m"] \\
C \circ C \arrow[r] & C \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

B.) On peut définir une unité pour cette composition de fonction différentiable en posant que U(D) est le composé:

$$U(D):\quad D \xrightarrow{\sim} D \bullet R_F \xrightarrow{1_D \bullet J} D \bullet C$$

où J est l'inclusion de R_F dans C.

C.) Pour $D_1 \xrightarrow{f} D_2 \bullet C$ un morphisme de distributeur on peut calculer la fonction différentiable $\tilde{f}$: $M_1 \longrightarrow M_2$ entre les espaces topologiques M_1 et M_2, respectivement sous-jacents à D_1 et D_2, en posant que $\tilde{f}$ est le composé:

$$\begin{tikzcd}
M_1 = D_1 \bullet \omega \arrow[r, "f \bullet 1_\omega"] \arrow[rd, dashed, "\tilde{f}"'] & D_2 \bullet C \bullet \omega \arrow[d, "1_{D_2} \bullet t"] \\
 & D_2 \bullet \omega = M_2
\end{tikzcd}$$

où t est une 2-flèche qui est laissée à définir au lecteur. [Utiliser $C \xrightarrow{\delta^o} R_o$].

CHAPITRE V

1. Généralisation de la notion de variété

1.1 Les considérations du Chapitre précédent suggèrent d'associer à n'importe quel groupoïde topologique G, une notion de G-variété puisque formellement nous n'avons pas fait appel aux propriétés spéciales à R.

Définition

Une G-variété est un distributeur $G \overset{V}{\Longrightarrow} 1$, G-fidèle et local sur la source.

Si on a de plus la donnée de $G \overset{C}{\Longrightarrow} G$, un distributeur local sur la source, et de 2-flèches

- $C \bullet C \xrightarrow{m} C$
- $1_G \xrightarrow{u} C$

qui font de C un monoïde; il est possible de poser que:

Définitions

I) Un C-morphisme entre V_1 et V_2 des G-variétés est une 2-flèche:

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \bullet C$$

II) Le composé de $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \bullet C$ et $V_2 \xrightarrow{q} V_3 \bullet C$ des C-morphismes, désigné par q*f, se définie comme:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, dashed, "q*f"'] & V_2 \bullet C \arrow[d, "q \bullet C"] \\
& V_3 \bullet C \bullet C \arrow[d, "1_{V_3} \bullet m"] \\
& V_3 \bullet C
\end{tikzcd}$$

III) L'unité pour la composition * se définie comme:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, dashed, "I_V"'] & V \bullet 1_G \arrow[d, "1_V \bullet u"] \\
& V \bullet C
\end{tikzcd}$$

1.2 Donnons quelques exemples de groupoïdes topologiques qui donnent lieu à des notions de variétés intéressantes. Comme il est souvent plus facile de décrire un espace au sens de Souriau qu'un groupoïde topologique, nous préférerons donc donner ces exemples en terme d'espace de Souriau.

A.) L'espace de Souriau, dont les objets sont les ouverts de $\sum_{n\in N} R^n$ et dont les flèches sont les difféomorphismes k-fois différentiables, donne lieu à la notion de variété avec cartes k-fois différentiables. Le type de fonctions différentiables considéré entre ces variétés sont les fonctions k-fois différentiables.

B.) L'espace de Souriau, dont les objets sont les ouverts d'un espace topologique quelconque et dont les flèches sont les homéomorphismes entre ces ouverts, donne lieu à la notion de variété topologique.

C.) L'espace de Souriau, dont les objets sont les ouverts de $\sum_{n\in N} R^n$ et dont les flèches sont les difféomorphismes de Jacobien positif en tout point, donne lieu à la notion de variété orientée. Et on peut caractériser, en terme de distributeur, la notion de fonction différentiable, préservant l'orientation.

D.) L'espace de Souriau, dont les objets sont les ouverts d'un espace métrique et les flèches sont les homéomorphismes Lipschitziens, donne lieu à la notion de variété localement Lipschitzienne.

On peut définir encore des groupoïdes donnant lieu aux notions de variétés localement affine, analytique, etc...

2. Fibrés généralisés

2.1 Poursuivons notre effort de synthèse des constructions de variétés en décrivant, dans le même esprit, différentes notions de Fibré.

A.) Nous allons montrer que la notion de Fibré tangent donne lieu à un distributeur

$$1 \xRightarrow{T} R .$$

alors, pour calculer le Fibré tangent à une variété différentielle, caractérisée par un distributeur $R \xRightarrow{D} 1$, il suffira de composer T et D. Nous considérerons donc que la donnée d'un distributeur $1 \xRightarrow{T} G$ caractérise une notion de T-Fibré sur les G-variétés obtenues en posant, pour $G \xRightarrow{V} 1$ une G-variété, que $T(V) = V \bullet T$.

A.1) Définissons un relateur $1 \xRightarrow{T} R_o$ en posant:

- $T = \sum_{n\in N} R^n \times R^n$, où $R^n \times R^n$ est munie de la topologie produit, chaque composante R^n étant munie de la topologie habituelle.

- $T \xrightarrow{P} R_o$ est la fonction continue définie en posant $P(x,y) = y$, pour $(x,y) \in \sum_{n \in N} R^n \times R^n$.

A.2) Définissons encore une 2-flèche

$$R_F \circ T \xrightarrow{m} T$$

en posant, pour $\underline{\lfloor f,y \rfloor} \in R_F$ et $(x,y) \in T$, que

$$m(\underline{\lfloor f,y \rfloor},(x,y)) = (J_y(f)(x),f(y))$$

où $J_y(f)$ désigne le Jacobien de f en y. On vérifie facilement que m possède alors les propriétés qui font de T un relateur: $1 \overset{T}{\Longrightarrow} R.$

A.3) Le lecteur peut se convaincre au moyen d'un dessin que $D \bullet T$ est le Fibré tangent à $D \bullet \omega$, si D est une R-variété.

B.) Si $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \bullet C$ est un C-morphisme entre deux G-variétés V_1 et V_2, il est possible de définir une fonction continue T_f entre les T-fibrés $T(V_1)$ et $T(V_2)$ en posant que $T(f)$ est le composé:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \bullet T \arrow[r, "f \bullet T"] \arrow[dr, dashed, "T(f)"'] & V_2 \bullet C \bullet T \arrow[d, "1_{V_2} \bullet t"] \\
& V_2 \bullet T
\end{tikzcd}$$

où on s'est donné à priori un certain morphisme de distributeur

$$C \bullet T \xrightarrow{t} T$$

décrivant une action de C sur T analogue à l'action de l'ensemble des fonctions différentiables sur le fibré tangent. La fonction continue T_f joue le rôle, par rapport à la notion de T-fibré, de Jacobien.

2.2 Il semble donc que la notion de distributeur permette une bonne synthèse des divers types de variété ainsi que des constructions qui s'y rattachent. Le chapitre suivant se veut une porte ouverte à l'étude de la généralisation que nous suggérons.

Conclusion

1. On se devrait, maintenant, d'effectuer une étude des propriétés générales des distributeurs. Nous nous contenterons de remarquer que la catégorie des distributeurs, locaux sur la source, entre A [une catégorie topologique] et 1, est un topos. En effet la donnée d'une catégorie topologique A, dont le morphisme source est un homéomorphisme local, est équivalente à la donnée d'une catégorie $\mathcal{A}$, au sens habituel, dont les objets sont les ouverts d'un espace topologique et dont les flèches sont des fonctions continues entre ces ouverts. De plus cette catégorie est munie d'une opération de restriction, telle que décrite en Section I.1. On peut donc définir une notion de recouvrement d'un objet U de $\mathcal{A}$ en posant:

$\{U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U\}_{\alpha\in A} \in \mathrm{Cov}_{\mathcal{A}}(U)$ si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, f_α est une flèche de $\mathcal{A}$ qui est injective et:

$$\bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha(U_\alpha) = U$$

On a alors fait de $\mathcal{A}$ un site et on remarque que la donnée d'un faisceau d'ensemble sur $\mathcal{A}$ est équivalente à la donnée d'un distributeur local sur la source: $A \overset{F}{\dashrightarrow} 1$. Il devient donc évident que la catégorie ξ_A des distributeurs $A \dashrightarrow 1$ locaux sur la source est un topos; c'est le topos des faisceaux sur $\mathcal{A}$.

2. Nous remarquerons encore qu'un distributeur $A \xRightarrow{D} B$, local sur la source, donne lieu à un foncteur $\xi_B \xrightarrow{D^*} \xi_A$ de la façon suivante:

Pour $B \xRightarrow{X} 1$ un objet de ξ_B, on pose $D^*(X) = X \bullet D$, i.e.:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, Rightarrow, "D"] \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

et pour $B \underset{Y}{\overset{X}{\underset{\downarrow\phi}{\Longrightarrow}}} 1$ une flèche de ξ_B, on pose

$$D^*(\phi) = \phi \bullet 1_D$$

en étudiant ce foncteur, on peut montrer qu'il possède un adjoint à droite.

C'est pourquoi on peut définir d'une façon générale un distributeur comme étant un foncteur entre topos possédant un adjoint à droite. Pour un bon choix du type de topos impliqués, il semble alors possible d'élaborer une théorie générale de la notion de variété s'appliquant à des contextes autres que ceux des espaces topologiques. Nous laisserons à demain le soin de répondre à cette question et de montrer l'intérêt d'y répondre.

25 août 1977
François Bergeron

ANNEXE TOPOLOGIQUE

I) Espaces irréductibles

Un espace topologique X est dit irréductible si et seulement si, $X \neq \phi$ et pour tout couple (F,G) de fermés de X tels que $F \cup G = X$, on a:

$$F = X \quad \text{ou} \quad G = X.$$

II) Partie irréductible d'un espace

Une partie irréductible A d'un ensemble topologique X est une partie A de X telle que A, muni de la topologie induite, est un espace irréductible.

III) Espace sobre [voir bibliographie (D)]

Un espace topologique X est dit sobre, si et seulement si X est T_o et les fermés irréductibles de X sont tous de la forme $\overline{\{x\}}$, pour un $x \in X$.

Remarque

Pour $x \in X$ on a toujours que $\overline{\{x\}}$ est un fermé irréductible. En effet pour F et G des fermés de X,

$$(F \cup G) \cap \overline{\{x\}} = \overline{\{x\}}$$

entraîne que $x \in F$ ou $x \in G$, donc $\overline{\{x\}} \subseteq F$ ou $\overline{\{x\}} \subseteq G$. D'où l'assertion.

IV) Filtres complètement premiers

Un filtre $\mathcal{F}$ de parties de X est dit complètement premier si et seulement si pour toute famille $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de parties de X, on a:

$$(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathcal{F}) \Rightarrow \exists \alpha \in \Lambda (U_\alpha \in \mathcal{F})$$

Proposition 1

Dans un espace sobre X, tout filtre complètement premier $\mathcal{F}$ converge vers un et un seul point.

Démonstration

A.) Soit $F = X \setminus (\bigcup_{U \notin \mathcal{F}} U)$, alors F est irréductible [F est non vide parce que $\mathcal{F}$ est un filtre]. En effet soit U et V des ouverts de X tels que $U \cap F \neq \phi$ et $V \cap F \neq \phi$.

Supposons que $(U \cap V) \cap F = \phi$, alors $(X \setminus (U \cap V)) \in \mathcal{F}$ parce que sinon $X \setminus (U \cap V) \subseteq \bigcup_{U \notin \mathcal{F}} U$ donc

$$X \setminus (\bigcup_{U \notin \mathcal{F}} U) \subseteq X \setminus (X \setminus (U \cap V))$$

et $F = X \setminus (\bigcup_{U \notin \mathcal{F}} U)$

$\subseteq U \cap V$

ce qui contredit $(U \cap V) \cap F = \phi$.

Ceci entraîne que $(U \cap V) \notin \mathcal{F}$, en conséquence $U \notin \mathcal{F}$ ou $V \notin \mathcal{F}$. On a donc $F \cap U = \phi$ ou $F \cap V = \phi$, ce qui contredit nos hypothèses, et on conclue que

$$(U \cap F = \phi) \quad \text{et} \quad (V \cap F = \phi) \Rightarrow (U \cap V) \cap F = \phi.$$

Il découle facilement de la contraposé de cette implication que:

$$((H \cup G) \cap F = F) \Rightarrow (H = F) \quad \text{ou} \quad (G = F)$$

pour H et G des fermés de X.

B.) Donc $F = \overline{\{x\}}$ puisque X est sobre, et on a que $\mathcal{F}$ converge vers x puisque pour tout $U \in \mathcal{F}$ on a certainement $x \in U$. Ceci montre l'existence d'un point de convergence.

C.) $\mathcal{F}$ converge vers au plus un point puisque X est T_o.

Ceci achève la démonstration.

Proposition 2

Une bijection croissante $O(X) \xrightarrow{F} O(Y)$, entre les treillis d'ouverts de deux espaces topologiques X et Y, induit un homéomorphisme $Y \xrightarrow{\underset{\sim}{f}} X$ de façon fonctorielle.

Démonstration

A.) Pour $y \in Y$, soit $\mathcal{F}_y$ le filtre définit comme:

$$\mathcal{F}_y = \{U \in O(X) | y \in F(U)\}.$$

$\mathcal{F}_y$ est complètement premier puisque $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{F}_y$ entraîne que $y \in F(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$. Or, $F(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} F(U_\alpha)$ parce que F est un isomorphisme de treillis. Donc il existe $\alpha \in A$ tel que $y \in F(U_\alpha)$ ce qui est équivalent à dire que $U_\alpha \in \mathcal{F}_y$.

B.) Posons $f(y)$ égal au point de convergence de $\mathcal{F}_y$. On aura alors une fonction

$$Y \xrightarrow{f} X$$

qui est continue puisque

$$f^{-1}(U) = F(U), \text{ pour } U \in O(X)$$

En effet, $f^{-1}(U) = \{y \in Y | f(y) \in U\}$ c'est-à-dire:

$$f^{-1}(U) = \{y \in Y | U \in \mathcal{F}_y\}$$

ou encore

$$f^{-1}(U) = \{y \in Y | y \in F(U)\}.$$

C.) Enfin on a que des bijections croissantes

$$O(X) \xrightarrow{F} O(Y)$$

$$O(Y) \xrightarrow{H} O(Z)$$

induisent des fonctions continues $Y \xrightarrow{f} X$ et $Z \xrightarrow{h} Y$ telles que $f \circ h$ soit la fonction continue induite par $H \circ F$ puisque:

$$\mathcal{H}_z = \{U \in O(Z) | z \in H \circ F(U)\}$$

$$= \{U \in O(Z) | h(z) \in F(U)\}$$

$$= F_{h(z)}$$

donc

$f \circ h(z)$ est le point de convergence du filtre premier $\mathcal{H}_z$.

On en conclue que f est un homéomorphisme puisque F est un isomorphisme.

V) Homéomorphismes locaux

Un homéomorphisme local $Y \xrightarrow{h} Z$, est une surjection continue telle que pour tout $y \in Y$ il existe un ouvert U de Y et un ouvert V de Z tels que:

1) $y \in U$

2) $h(U) = V$

3) $h|_U: U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme.

Proposition 3

Le pull-back d'un homéomorphisme local est un homéomorphisme local.

Démonstration

Soit $Y \xrightarrow{h} Z$ un homéomorphisme local et $X \xrightarrow{f} Z$ une fonction continue. Soit de plus U un voisinage de $y \in Y$ tel que $h|_U : U \longrightarrow V$ [où $V = h(U)$] est un homéomorphisme. On a alors que le pull-back k:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(V)^* \arrow[r, "\underset{\sim}{k}"] \arrow[d] & f^{-1}(V) \arrow[d, "f|_{f^{-1}(V)}"] \\
U \arrow[r, "h|_U"] & V
\end{tikzcd}$$

de $h|_U$ le long de $f|_{f^{-1}(V)}$ est un homéomorphisme [le pull-back d'un iso est iso].

Mais $f^{-1}(V)^*$ est un ouvert de $X \underset{Z}{\times} Y$ tel que pour $f^*(h)$, le pull-back de h le long de f:

$$\begin{tikzcd}
X \underset{Z}{\times} Y \arrow[r, "f^*(h)"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

on ait:

$$f^*(h)|_{f^{-1}(V)^*} = k$$

donc $f^*(h)$ est un homéomorphisme local.

▨

La démonstration des deux propositions suivantes est laissée en exercice.

Proposition 4

Si on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & X \arrow[dl, "k"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

où h et f sont des homéomorphismes locaux, alors k est un homéomorphisme local.

Proposition 5

Si on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "k"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

où f est surjective et ouverte, et où h est un homéomorphisme local, alors f et k sont des homéomorphismes locaux.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier d'une façon particulière mon directeur de thèse, Monsieur André Joyal, pour sès conseils judicieux lors de la préparation de ce mémoire. Je tiens à remercier aussi ma femme Rosamaria pour son support moral indispensable.

François Bergeron

BIBLIOGRAPHIE

B BENABOU, J.; Introduction to Bicategories; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 47, Springer-Verlag, 1967.

D DIEUDONNE, J.; Fondements de la Géométrie Algébrique Moderne; Les Presses de l'Université de Montréal, 1967.

G GODEMENT, R.; Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux; Paris, Herman, 1958, Actualités scientifiques et industrielles.

J JOHNSTONE, P.T.; Some Aspects of Internal Category Theory in an Elementary Topos; Cambridge, University of Cambridge, 1974, Photocopie.

K KOCK, A. et WRAITH, G.C.; Elementary Toposes; Arhus University, Lecture Note Series No. 30, Septembre 1971.

M MACLANE, S.; Category Theory for the Working Mathematician; Springer Verlag, 1971.

S SOURIAU, J.M.; Géometrie et Relativité; Paris, Herman, 1964.