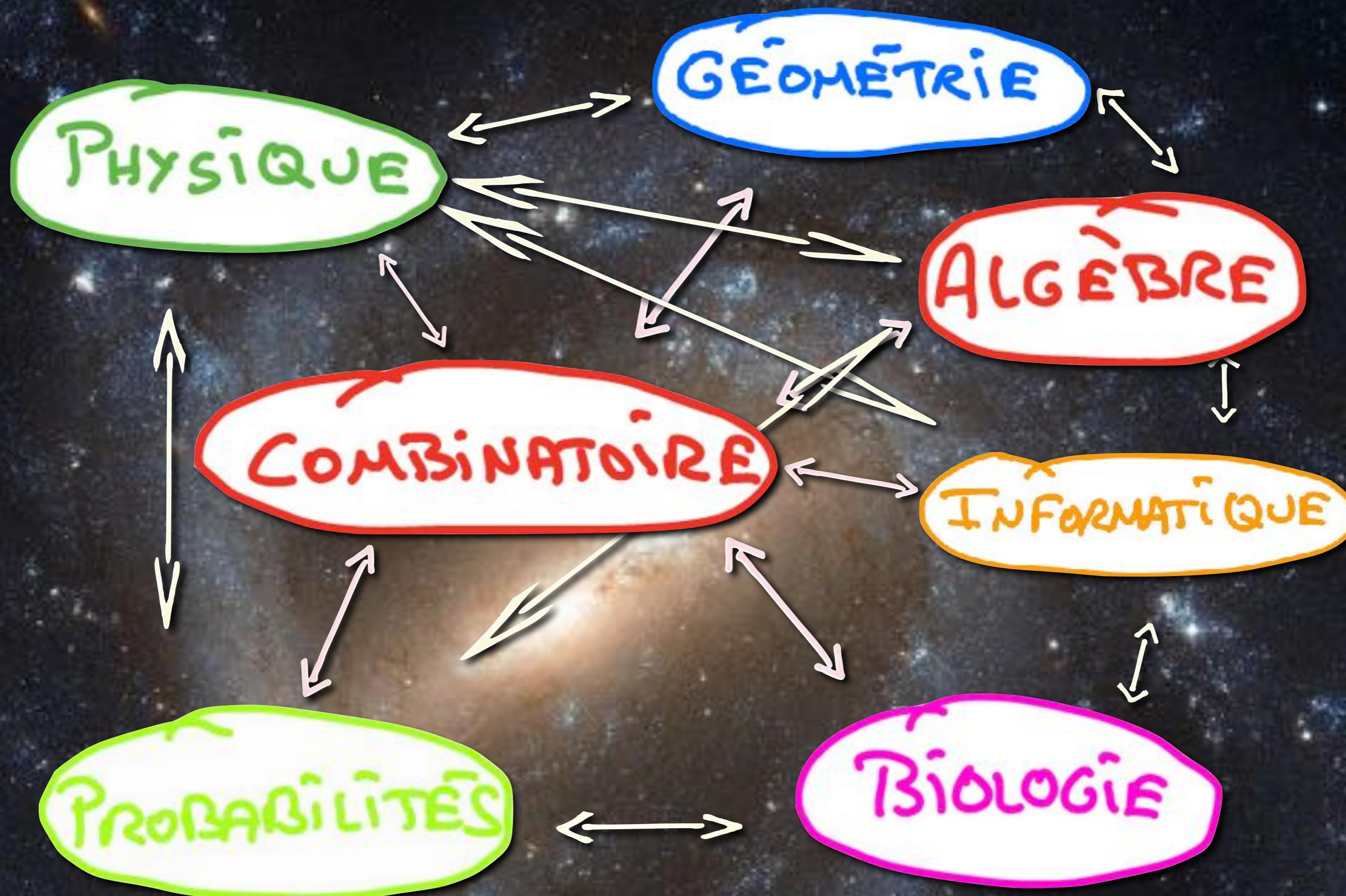
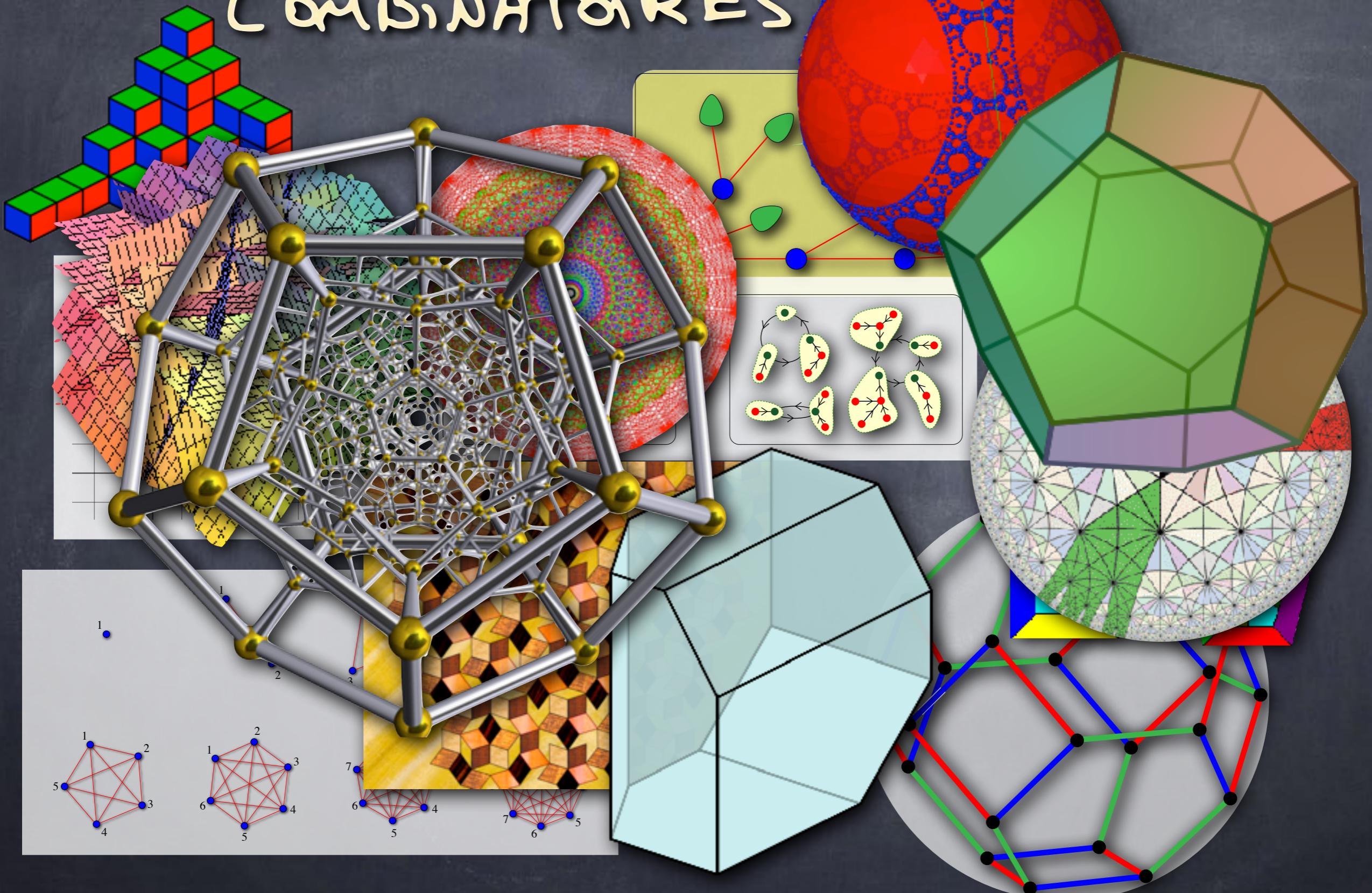


COMBINATOIRE ET ALGÈBRE



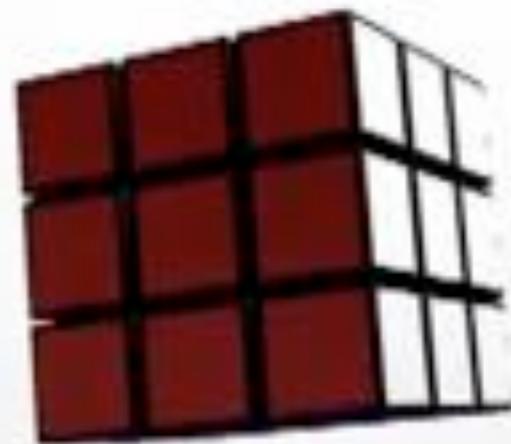
OBJETS COMBINATOIRES



SYMMÉTRIES

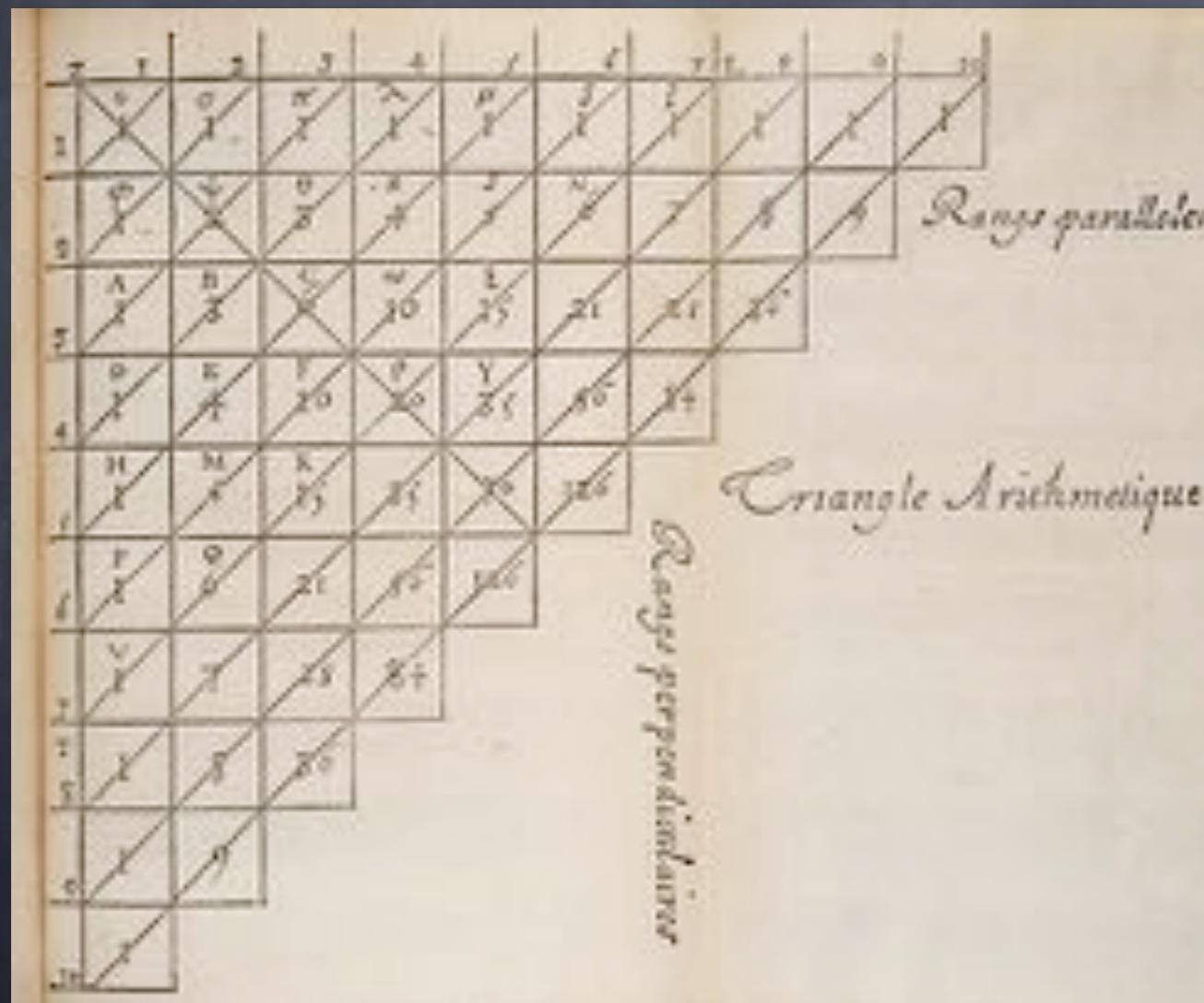


ALGÈBRE



TRIANGLE DE PASCAL

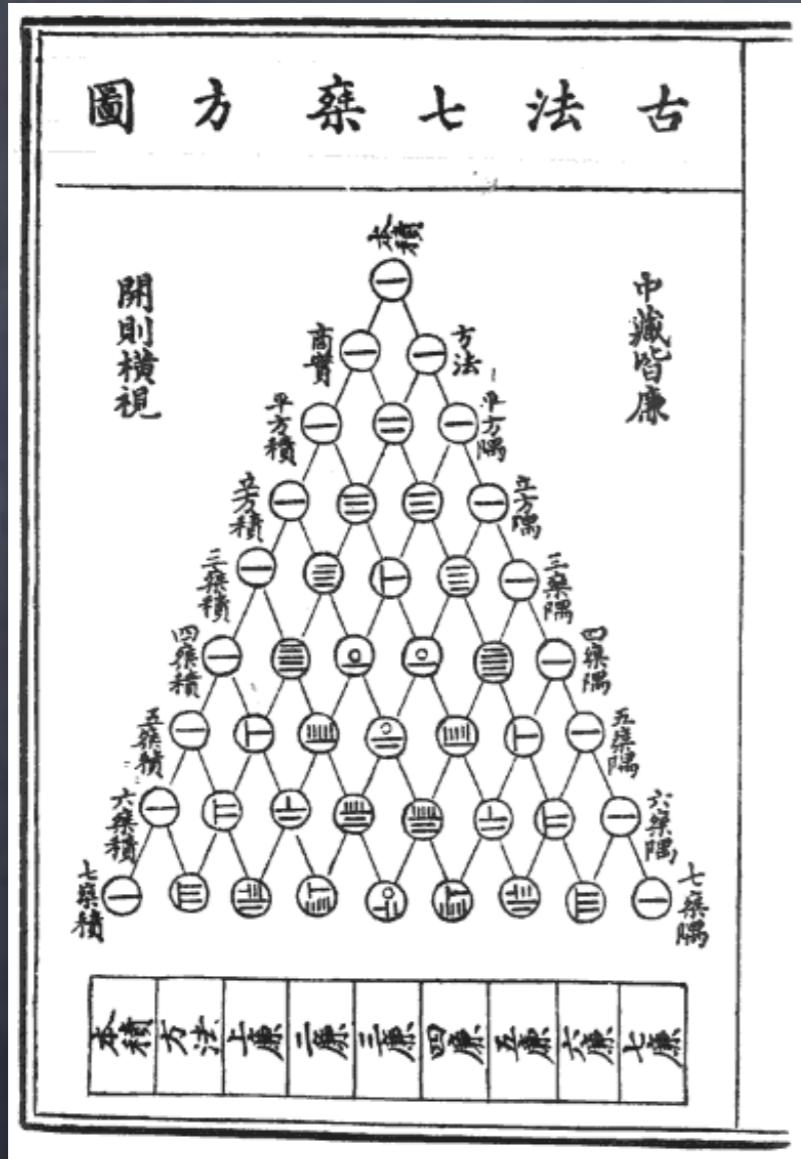
XVII SIÈCLE



BLAISE PASCAL (1623-1662)

TRIANGLE DE Hui

XIV SIÈCLE



YANG Hui
(~1238 - 1298)

TRIANGLE DE PASCAL

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$$m! := m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! := 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$$m! := m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! := 1$$

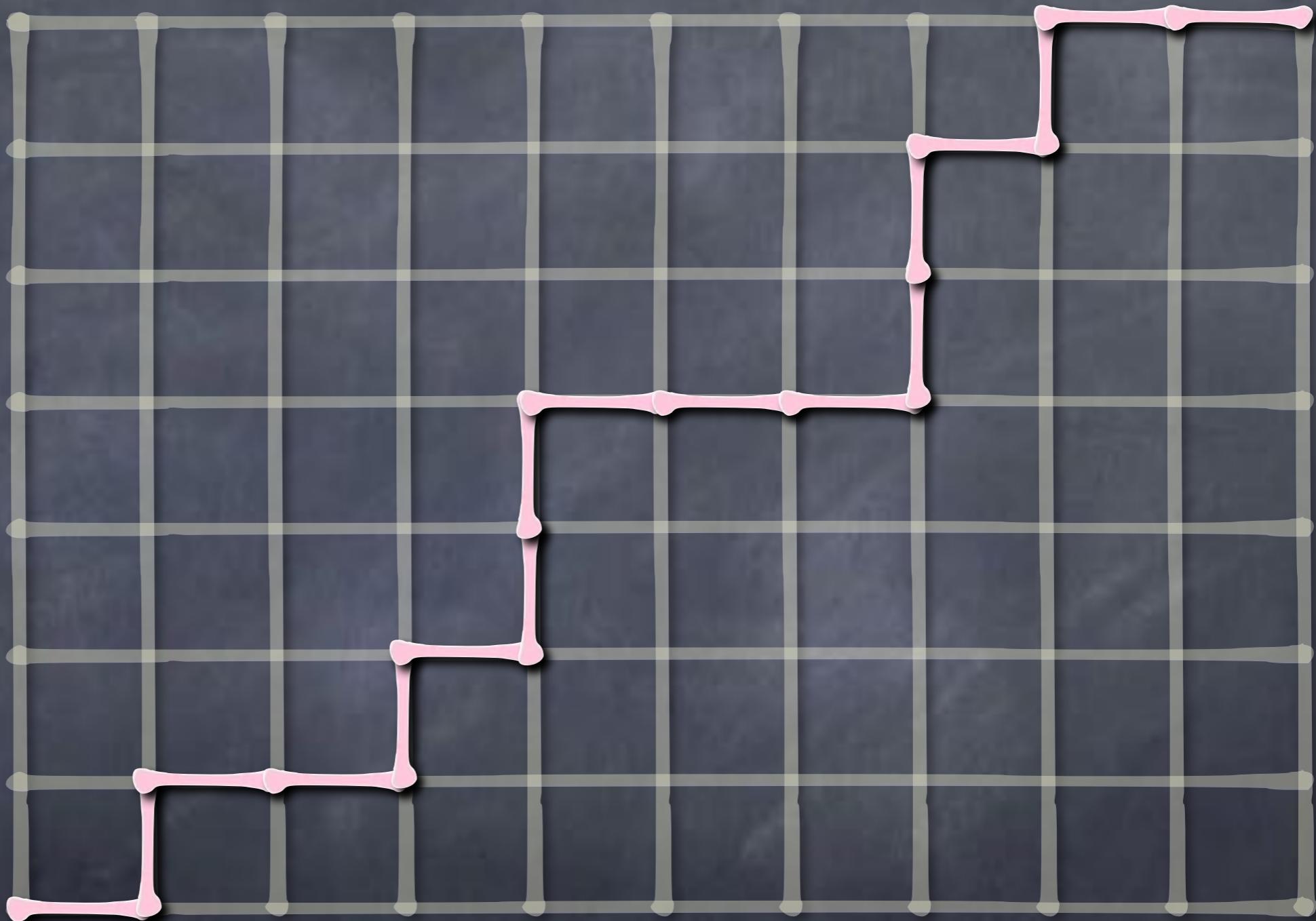
$$\frac{m!}{k! (m-k)!} = \frac{(m-1)!}{k! (m-1-k)!} + \frac{(m-1)!}{(k-1)! (m-k)!}$$

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

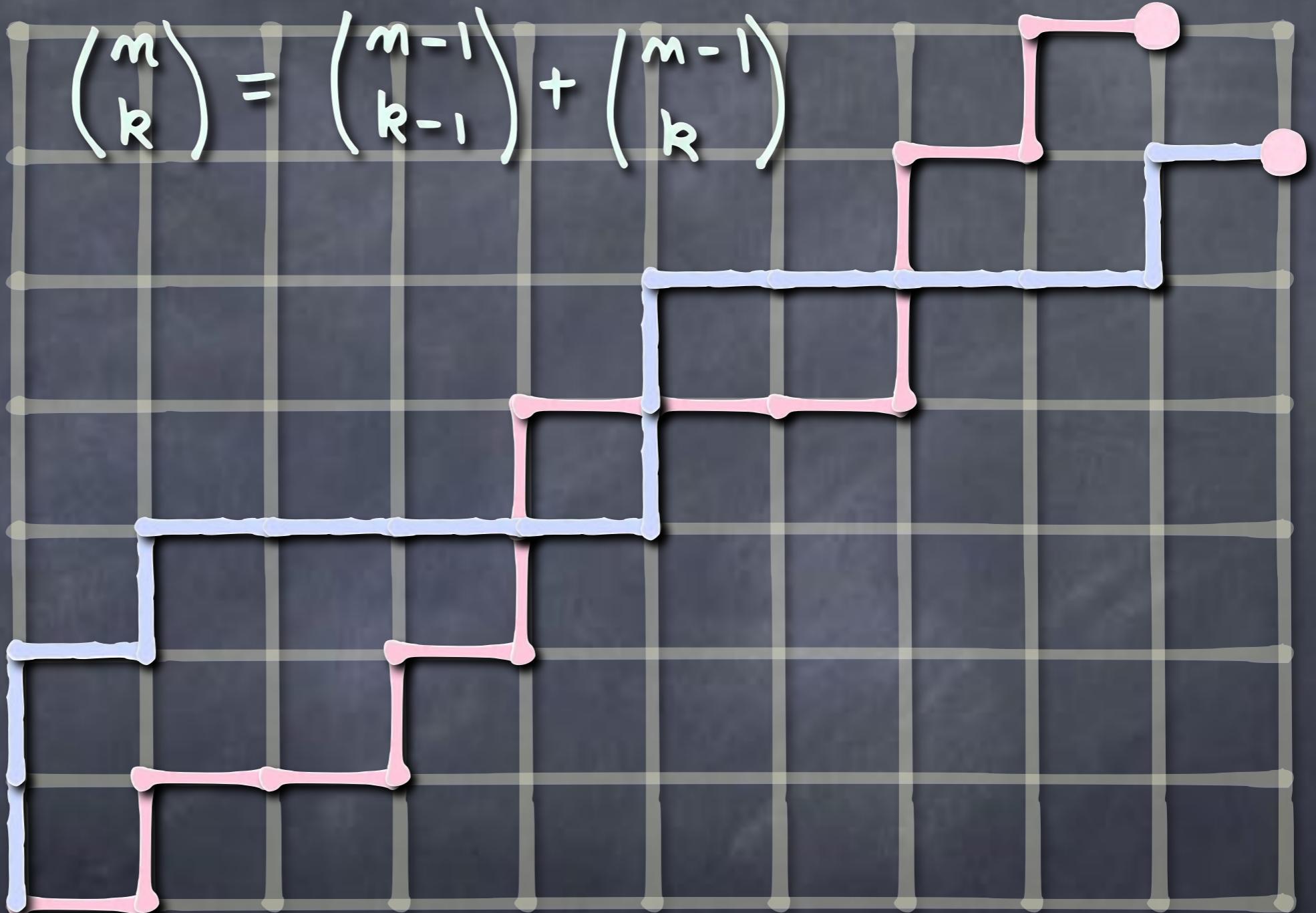
$$m! := m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! := 1$$

$$m = (m-k) + k$$



$\binom{m}{k}$ CHEMINS



ALGÈBRE

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x + y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1} (x+y)$$

$$e^{(x+y)t} = 1 + \dots + (x+y)^m \frac{t^m}{m!} + \dots$$

$$e^{(x+y)t} = e^{xt} e^{yt}$$

$$e^{xt} e^{yt} = 1 + \dots + \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) \frac{t^m}{m!} + \dots$$

COEFFICIENTS HOMOGENEUX

$$(x+y+z)^n = \sum_{a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c} x^a y^b z^c$$

CHEMINS DE TAXI EN
3 DIMENSIONS

$$\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a! b! c!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

COEFFICIENTS HOMOGENEUX

$$(x+y+z)^n = \sum_{a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c} x^a y^b z^c$$

DE MÊME POUR

$$(x+y+z+t)^n$$

CHEMINS DE TAXI EN
4 DIMENSIONS ...

CHEMINS DE TAXI EN 3 DIMENSIONS



UNE LETTRE DE
EULER
À
GOLDBACH
BERLIN,
4 SEPTEMBRE
1751



LEONHARD PAUL EULER
(1707 - 1783)

es leicht zu demonstrieren ist, dass alsdann auch seyn wird
 $\beta\beta + \gamma\gamma + (\delta + pu)^2 + 8 = (b + pu)^2 + (c + 2u)^2 + (d + 2u)^2$,
si ponatur $u = (\delta - b)p - (c + d)$. Ich weiss gar wohl,
dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden
kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen for-
mulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art
immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhie
 $\delta + pu = A$, $b + pu = B$, $c + 2u = C$, $d + 2u = D$, so
entsteht daraus diese *acquatio infinitis generalior*

$$\begin{aligned}\beta\beta + \gamma\gamma + (A + PU)^2 + 8 = \\ (B + PU)^2 + (C + 2U)^2 + (D + 2U)^2.\end{aligned}$$

wenn P numerum integrum quemeunque bedeutet und

$$U = (A - B)P - (C + D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n + 4$
allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radic-
cum est = 2, aber nicht allezeit in quatuor quadrata impars,
quorum summa radicum est = 0, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa
quatuor quadratorum, quorum summa radicum est = 0, in
tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque qua-
drata, quorum summa radicum = 0, allezeit in quatuor qua-
drata die man angeben kann, resolviret werden können,
weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele cases,
da welches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht
= 0 ist, also ist z. Ex.

$$\begin{aligned}(12 + pp)b - c - d - e)^2 + (c - 2b)^2 + (d - 2b)^2 + \\ (e - 2b)^2 + 4ppbb =\end{aligned}$$

bis quatuor $(14 + pp)b - c - d - e)^2 + cc + dd + ee$.

Goldbach.

LETTRE CXL.

ETLER à GOLDHACH.

SUMMAIRE. Même sujet. Recherche sur le nombre des nombres dont la polygone peut être partagé en triangles par des diagonales.

Borde l. 4. September 1754.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrach-
tung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch
diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Unter-
suchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald
nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund
des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass
eine summa quatuor quadratorum $aa + bb + cc + dd$, quo-
rum summa radicum $a + b + c + d = 0$, allezeit in drey
quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen,
da doch derselbe ziemlich offensbar, indem

$$\begin{aligned}aa + bb + cc + dd = aa + bb + cc + (a + b + c)^2 = \\ (a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2.\end{aligned}$$

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könnte, so oft die summa radicum $a + b + c + d + e = 0$. Allein aus dem Vorigen erbellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengekommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzuseigen, davon nicht vier zusammengekommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$\begin{aligned} a \ldots b \ldots c \ldots d &= 0 \\ a \ldots b \ldots c \ldots e &= 0 \\ a \ldots b \ldots d \ldots e &= 0 \\ a \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \\ b \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \end{aligned}$$

wo das Zeichen \ldots statt \pm gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formula nur eine enthalten ist, die $= 0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa + bb + cc + dd + ee$$

sich in summan quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa + bb + cc + dd = \square + \square + \square,$$

wenn $a + b + c + d = 0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey

quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa + bb + cc + dd$ so beschaffen, dass $a + b + c + d = 2$, so ist $aa + bb + cc + dd = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2 + 1$; folglich ist $aa + bb + cc + dd - 1$ in drey quadrata resolvabel. Da nun $8n+3$ in drey quadrata resolvabel, wenn man setzt

$$8n+3 = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2,$$

so wird $8n+3 = aa + bb + cc + dd$ dergestalt, dass

$$a + b + c + d = 2;$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula verschritten werden können.

Also ein quadrilaterum $abcd$ kann entweder durch die diagonalem ac , oder durch bd , und also auf zweyerley Art in zwey triangula resolvirt werden.

Ein Fünfeck $abcde$ wird durch zwey diagonales in drey triangula getheilet, und solches kann auf fünferley verschiedene Arten geschehen, nemlich durch die diagonales I. ae , II. bd , III. ce , IV. db , V. ec , eb .

Ferner wird ein Sechseck durch drey diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 15 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-2$ triangula verschnit-

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könnte, so oft die summa radicum $a + b + c + d + e = 0$. Allein aus dem Vorigen erbellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengekommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzuseigen, davon nicht vier zusammengekommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$\begin{aligned} a \ldots b \ldots c \ldots d &= 0 \\ a \ldots b \ldots c \ldots e &= 0 \\ a \ldots b \ldots d \ldots e &= 0 \\ a \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \\ b \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \end{aligned}$$

wo das Zeichen \ldots statt \pm gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formula nur eine enthalten ist, die $= 0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa + bb + cc + dd + ee$$

sich in summan quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa + bb + cc + dd = \square + \square + \square,$$

wenn $a + b + c + d = 0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey

quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa + bb + cc + dd$ so beschaffen, dass $a + b + c + d = 2$, so ist $aa + bb + cc + dd = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2 + 1$; folglich ist $aa + bb + cc + dd - 1$ in drey quadrata resolvabel. Da nun $8n+3$ in drey quadrata resolvabel, wenn man setzt

$$8n+3 = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2,$$

so wird $8n+3 = aa + bb + cc + dd$ dergestalt, dass

$$a + b + c + d = 2;$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano herleitet haben.

Ich bin mir nicht wie vielerley Formulare in zwey Quadrata resolvabel, welche betrifft, auf durch Diagonale.

Also es diagonalen in zwey Quadrata resolvabel durch die weyerley Art

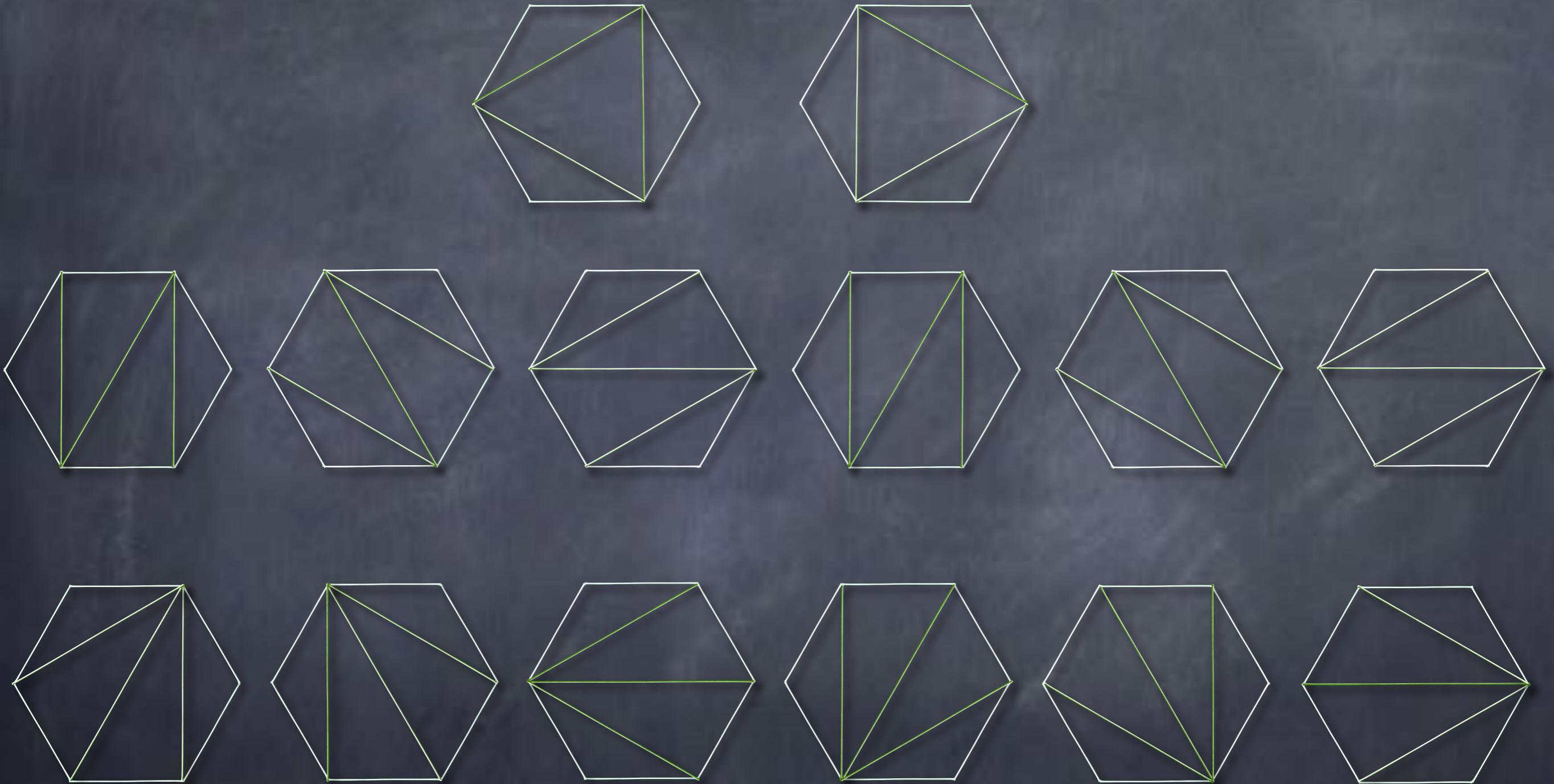
Ein Sechseck durch drei diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschaffen.

I. ac , ad. II. bd , bc. III. ce , cd . IV. db , da , V. ec , eb .

Ferner wird ein Sechseck durch drei diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschaffen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-2$ triangula zertheilt

TRIANGULATIONS



NOMBRES DE CATALAN

1 2 5 14 42 132 ...

ANTO MING 1730
(1692-1763)

JOHAN ANDREAS VON SEGNER 1761
(1704 - 1777)

EUGÈNE CHARLES CATALAN 1838
(1814 - 1894)

ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könnte. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdots (4n - 10)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n - 1)}$$

oder es ist $1 = \frac{2}{2}, 2 = 1 \cdot \frac{6}{3}, 5 = 2 \cdot \frac{10}{4}, 14 = 5 \cdot \frac{14}{5},$

$\sqrt{2} = 14 \cdot \frac{14}{6}, 132 = 42 \cdot \frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl

die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen $1, 2, 5, 14, \sqrt{2}, 132$, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerkt, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{16} + \frac{14}{64} + \frac{42}{256} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

—
Goldbach à Euler.

SUMMAE. Seite des rechten manigfach.

St. Petersburg 4. 10. Oktober 1756.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \text{etc.}$$

erschien. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coefficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$\dots 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coefficientes bereits exprimirt geashen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aa = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könnte. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

Hieraus habe ich nun den Schluß gezogen, dass generaliter sey

$$x = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdots (4n - 10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n - 1)}$$

oder es ist $1 = \frac{1}{2}, 2 = 1 \cdot \frac{2}{3}, 5 = 2 \cdot \frac{5}{4}, 14 = 5 \cdot \frac{14}{5}$,

$\sqrt{2} = 14 \cdot \frac{14}{6}$, $132 = 42 \cdot \frac{22}{3}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sache nicht weit leichter entwickelt werden können. Über die Progression der Zahlen $1, 2, 5, 14, \sqrt{2}, 132$, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerkt, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

—
Goldbach à Euler.

SUMMAE. Seite des rechten manuskript.

St. Petersburg 4. 10. Oktober 1756.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \text{etc.}$$

erschien. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coefficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$\dots 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coefficientes bereits exprimirt geashen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aa = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könnte. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

Hieraus habe ich nun den Schluß gezogen, dass generaliter sey

$$x = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdots (4n - 10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n - 1)}$$

oder es ist $1 = \frac{1}{2}, 2 = 1 \cdot \frac{2}{3}, 5 = 2 \cdot \frac{5}{4}, 14 = 5 \cdot \frac{14}{5}$,

$\sqrt{2} = 14 \cdot \frac{14}{6}$, $132 = 42 \cdot \frac{22}{3}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sache nicht weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen $1, 2, 5, 14, \sqrt{2}, 132$, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerkt,

$$\text{dass } 1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa}.$$

Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

—
Goldbach à Euler.

SUMMAE. Seite des rechten manuskript.

St. Petersburg 4. 10. Oktober 1756.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \text{etc.}$$

erschien. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coefficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A \dots 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coefficientes bereits exprimirt geashen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aa = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

EULER ÉCRIT QUE

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = 1 + 1 \cdot z + 2 \cdot z^2 + 5 \cdot z^3 + 14 \cdot z^4 + \dots$$

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$



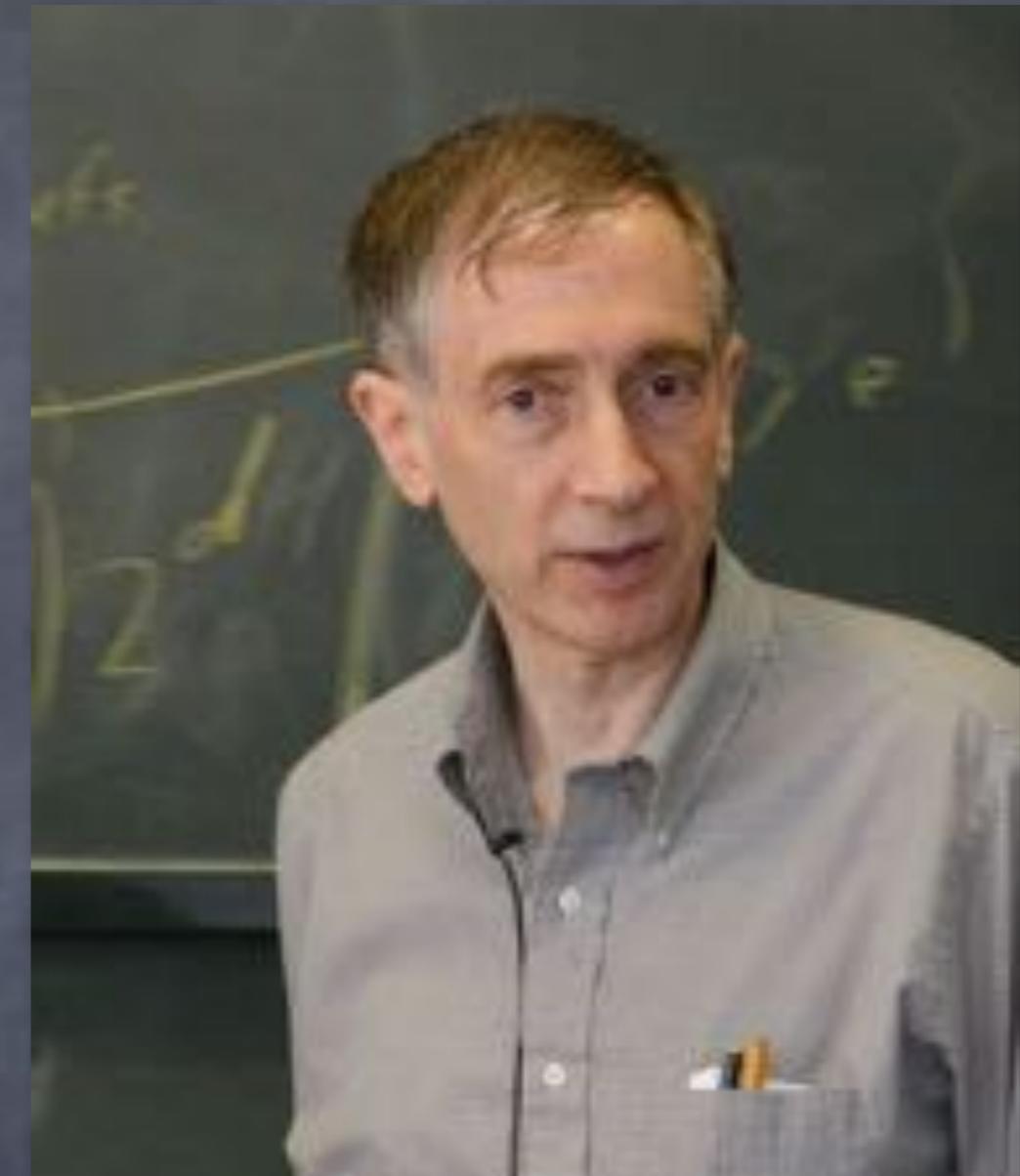
EUGÈNE CHARLES CATALAN
(1814 - 1894)

Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62

Enumerative Combinatorics

Volume 2

RICHARD P. STANLEY



RICHARD P. STANLEY
MIT

underlined terminology clear. (The terms used in (iv)–(vii) are defined later in §6.7.) Ideally S_1 and S_2 should be proved to have the same cardinality by exhibiting a simple, elegant bijection $\phi_1 : S_1 \rightarrow S_2$ (or 4200 bijections in all). In most cases the sets S_1 and S_2 will actually coincide, but their descriptions will differ.

a. Triangulations of a convex $(n+2)$ -gon into n triangles by $n-1$ diagonals that do not intersect in their interiors.



b. Binary parenthesizations of a string of $n+1$ letters:

$$(AB - CD) \quad ABCD - CD \quad (A - B)(C - D) \quad A(B - CD)$$

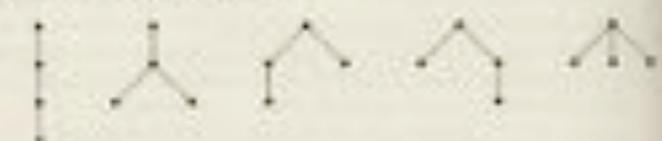
c. Binary trees with n vertices:



d. Plane binary trees with $2n+1$ vertices (or $n+1$ endpoints):



e. Plane trees with $n+1$ vertices:



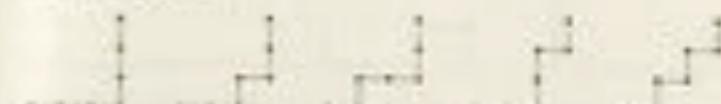
f. Planar (i.e., root has degree one) trivalent plane trees with $2n+2$ vertices:



g. Plane trees with $n+2$ vertices such that the rightmost path of each vertex of the root has even length:



8. Lattice paths from $(0, 0)$ to (n, n) with steps $(0, 1)$ or $(1, 0)$, never rising above the line $y = x$:



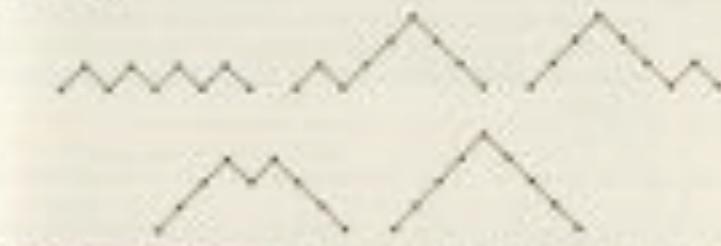
9. Dyck paths from $(0, 0)$ to $(2n, 0)$, i.e., lattice paths with steps $(1, 1)$ and $(1, -1)$, never falling below the x -axis:



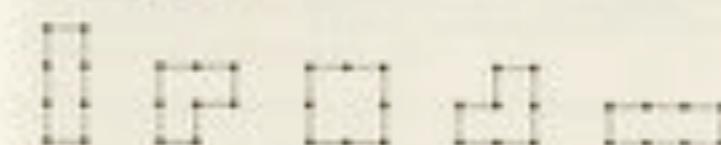
10. Dyck paths (as defined in (9)) from $(0, 0)$ to $(2n+2, 0)$ such that any maximal sequence of consecutive steps $(1, -1)$ ending on the x -axis has odd length:



11. Dyck paths (as defined in (10)) from $(0, 0)$ to $(2n+2, 0)$ with no peaks at height two:



12. (Unlabelled) pairs of lattice paths with $n+1$ steps each, starting at $(0, 0)$, using steps $(1, 0)$ or $(0, 1)$, ending at the same point, and only intersecting at the beginning and end:



13. (Unlabelled) pairs of lattice paths with $n+1$ steps each, starting at $(0, 0)$, using steps $(1, 0)$ or $(0, 1)$, ending at the same point, such that one path never

165

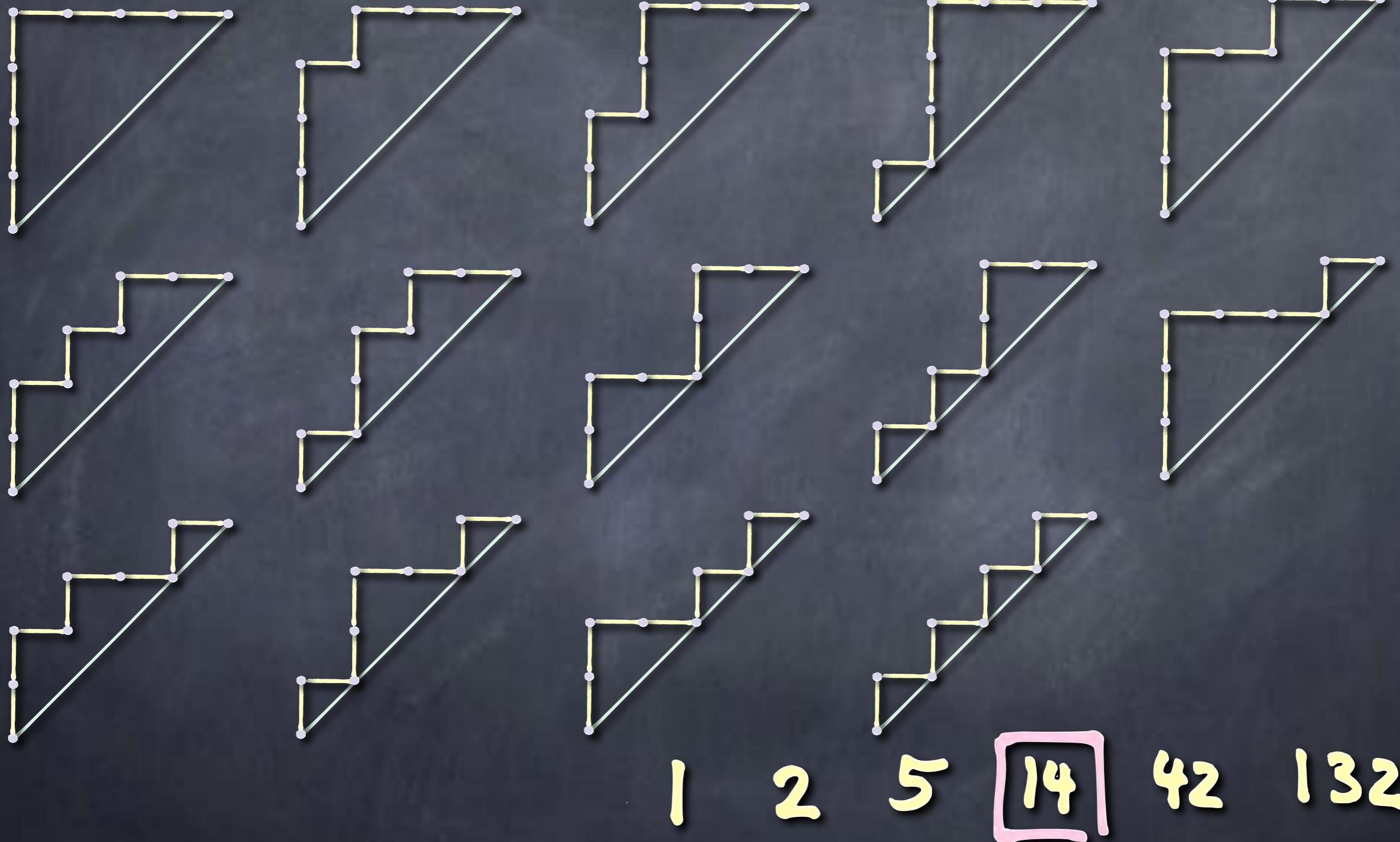
- 6.19. [1]-[3+] Show that the Catalan numbers $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ count the number of elements of the 66 sets S_i , $(a) \leq i \leq (nn)$, given below. We illustrate the elements of each S_i for $n = 3$, hoping that these illustrations will make any

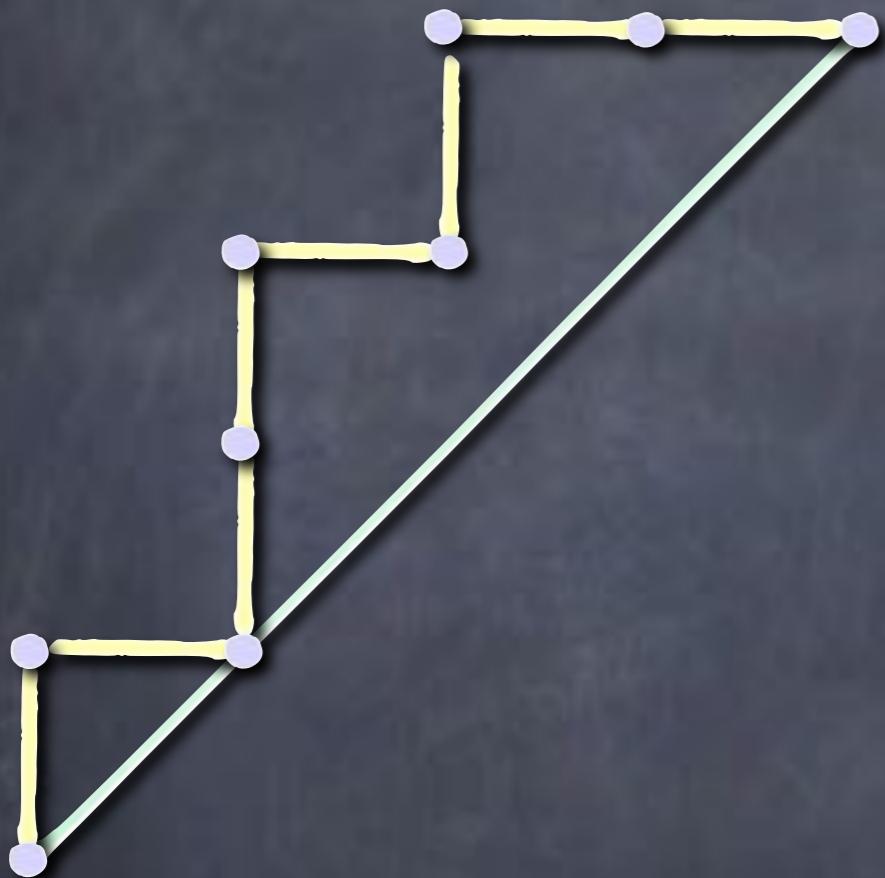
CHEMINS DE DYCK



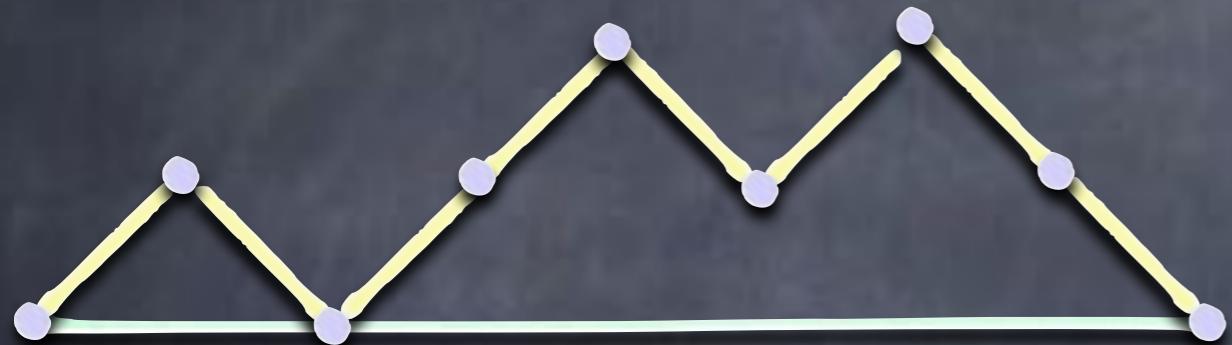
1 2 5 14 42 132

CHEMINS DE DYCK





CHEMINS DE DYCK



VON DYCK
(1856-1934)

DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES

$$\xi(z) = \frac{1}{1 - \bar{\xi}(z)}$$



$$= \frac{1}{1 - \text{mountain}}$$

DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES



DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES



DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES

$$\bar{\mathcal{L}}(z) = z \mathcal{L}(z)$$



DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{(1 - z \mathcal{L}(z))}$$

DÉCOMPOSITIONS RÉCURSIVES

$$\zeta(z)(1 - z \zeta(z)) = 1$$

$$\zeta(z) = 1 + z \zeta(z)^2$$

$$\zeta(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

ITÉRÉS DE $f(x)$

$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} x & \text{if } k=0 \\ f(f^{(k-1)}(x)) & \text{if } k>0 \end{cases}$$

INTÉRÊTS DE $f(x) := x^2 + y$

$$f^{(5)}(0) = 3 + 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 14 \cdot 3^5 + 26 \cdot 3^6 + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = \sum_{n \geq 0} c_n \tilde{z}^n$$

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

INTÉRÊTS DE $f(x) := x^2 + y$

$$f^{(5)}(0) = 3 + 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 14 \cdot 3^5 + 26 \cdot 3^6 + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = \sum_{m \geq 0} c_m j^m$$

$$c_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

NOMBRES DE FUß - CATALAN

1791

$$\frac{1}{(rm+1)} \binom{(r+1)m}{m}$$

NICOLAUS FUSS
(1755 - 1826)

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS IX.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXCL



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCV.



NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS IX.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXCL



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCV.



SOLVATIO QVAESTIONIS,
QVOT MODIS POLYGONVM n LATERVM
IN POLYGONA m LATERVM,
PER DIAGONALES RESOLVI QVEAT.

Auctore
NICOLAO FVSS.

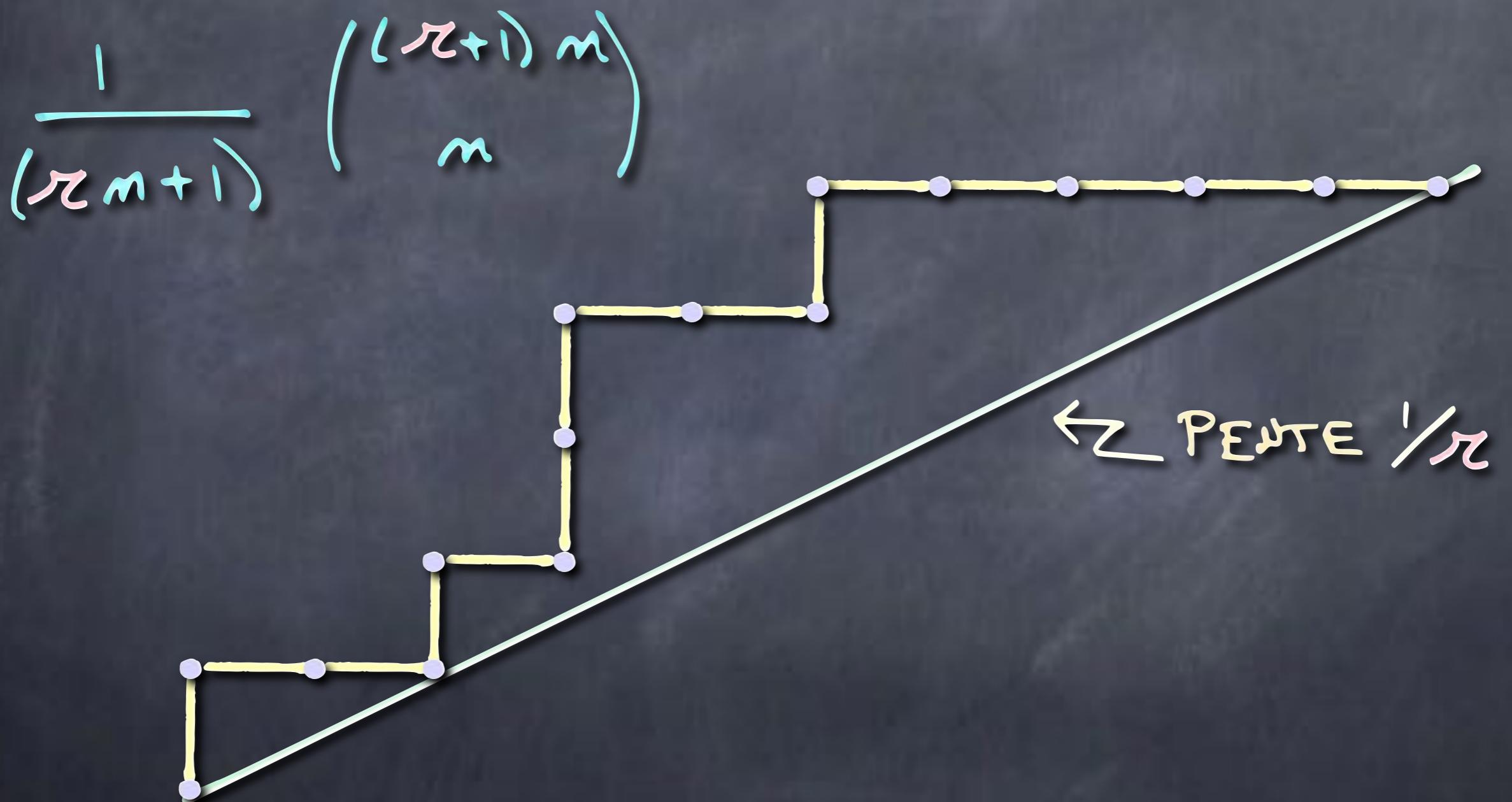
Conuentui exhib. die 9 Sept. 1793.

§. I.

In litteris a Clarissimo Pfaff Helmstadio die 15^{ma} mensis proxime superioris ad me datis, quibus acutissimus iste Geometra plura insignia inuenta, integrationem potissimum formularum differentialium irrationalium spicantia, benevolenter mecum communicare voluit, mentio quoque sit Problematis: quot modis n -gonum in m -gona per diagonales resolvere liceat? cuius solutionem generalem se consecutum significabat Cl. Pfaff, quaerendo ex me, num mihi, praeter easum $m = 3$, solutio aliqua huius quæstionis innotuerit. Cum igitur, praeter hunc casum memoratum, olim a Segnero in Tomo VII. nouiorum Commentariorum tradatum, nulla mihi innotuerit solutio huius Problematis maxime curiosi, abstinere non potui, quominus ipse, quomodo inuestigatio ista in genere fuscipienda sit, tentarem. Methodum a me adhibitam, conatumque meorum successus hic exhibere constitui...

Polygona refoluenda.	Polygona refoluentia.			
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
m	1	1	1	1
$2m - 2$	2	3	4	
$3m - 4$	5	12	22	
$4m - 6$	14	55	140	
$5m - 8$	42	273	969	
$6m - 10$	132	1428	7084	
$7m - 12$	429	7752	53820	
$8m - 14$	1430	43263	420732	
$9m - 16$	4862	246675	3362260	
	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	
m	1	1	1	
$2m - 2$	5	6	7	
$3m - 4$	35	51	70	
$4m - 6$	285	506	619	
$5m - 8$	2530	5481	10472	
$6m - 10$	23751	62832	141778	
$7m - 12$	231880	749398	1997688	
$8m - 14$	2330445	9203634	25989675	
$9m - 16$	23950345	115607310	430321633	

π - CHEMINS DE DYCK



NOMBRES DE FUSS

1	1	1	1	1	1	1
1	2	5	14	42	132	
1	3	12	55	273	1428	
1	4	22	140	969	7084	

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR ET COMBINATOIRE

1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, ...

$$\sec(x) + \tan(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{6} + 5 \frac{x^4}{24} + 16 \frac{x^5}{120} + \dots$$

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR ET COMBINATOIRE

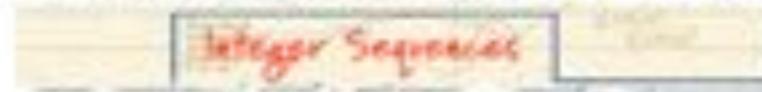
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = 1 + nx + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \dots$$

100

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.



The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™)

Enter a sequence, word, or sequence number:

1, 2, 5, 14, 42

Search Hints

Note: Advanced searches are now made here - see the [hints page](#) for details.

For more information about the Encyclopedia, see the [Welcome](#) page.

[Languages](#): English Šeština hrvatski Bangla Български Català 中文 (简体中文) 中文 (繁體中文) 中文 (简化中文)
Hrvatski Čeština Dansk Nederlands Esperanto Estoli ජෘග්‍රහ් සිංහල Français Deutsch Hrvatski Հայերեն
ไทย Magyar Igbo Bahasa Indonesia Italiano Արմենիական 한국어 Latviešu svenska Bahasa Melayu Svensk Polski Português
Română Русский Српски Srpskohrvatski Español Svenska Tagalog فارسی Diličeski Українська മലയാളം

[Lookup](#) | [Welcome](#) | [Wiki](#) | [Register](#) | [Music](#) | [Plot 2](#) | [Drama](#) | [Index](#) | [Browse](#) | [Moss](#) | [WebCam](#)

[Contribute new seq. or comment](#) | [Format](#) | [Transform](#) | [Puzzles](#) | [Hot](#) | [Classics](#)

Recent Additions | Most Popular | Superseeker | Maintained by The OEIS Foundation Inc.

Content is available under The OEIS End-User License Agreement.

Last modified November 7 10:35 EDT 2012. Contains 217099 sequences.

This site is supported by donations to [The OEIS Foundation](#)

[Integer Sequences](#)

1.3.3.6.11.23.47.106.235

Search

Map

(Entries from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences](#))

Search seq(1,3,6,11,23,47,106,235)

Displaying 1-1 of 1 result found.

page 1

[Set difference](#) [Intersection](#) [Complement](#) [Median](#) [Product](#) [Power](#) [Log](#) [Floor](#) [Ceil](#)

A000055	Number of trees with n unlabeled nodes. (Formerly M0179 S00299)	+3 -1
	1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235, 581, 1305, 3059, 7743, 19320, 48429, 123867, 317951, 823865, 2144591, 5423714, 14828974, 39299897, 106626899, 279792452, 71045467, 2013441032, 5469566595, 14830971662, 40330829830, 109972415221 (On page 10)	
links	links link internal links	
offset	0, 1	
comments	<p>Alias, number of unlabeled 2-gonal 2-trees with n 2-gons. Equals INVERTI transform of A000054: (1, 3, 4, 8, 17, 36, 78, 179,...). (From Gary W. Adamson, Mar 08 2009) Equals left border of triangle A112812. (From Gary W. Adamson, Mar 08 2009) Contribution from Robert Munafo, Jan 24 2010: (Start) Alias counts classifications of n trees that require exactly $n-1$ binary partitions; see Munafo link at A000054; also A112811 and A112812. The 11 trees for $n=7$ are illustrated at the Munafo web link. Link to A112811/A112812 conjectured by Robert Munafo, then proved by Andrew Weinhahn and Franklin T. Adams-Watters on Dec 29 2008. (End)</p>	
references	<p>F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux, Combinatorial species and tree-like structures, Camb., 1998, p. 279. N. L. Biggs et al., Graph Theory 1736-1936, Oxford, 1976, p. 49. A. Cayley, On the analytical forms called trees, Amer. J. Math., 2 (1881), 264-268. A. Cayley, On the analytical forms called trees, with application to the theory of chemical combinations, Reports British Assoc. Advances. Sci., 46 (1875), 287-300 = Math. Papers, Vol. 9, 427-460 (sum p. 458). E. B. Fine, Mathematical Constants, Cambridge, 2003, pp. 295-316. D. B. Green, The availability index of graphs, pp. 29-52 of Combinatorial Mathematics (Proceedings 2nd Australian Conf.), Lect. Notes Math., 493, 1974. J. L. Gross and J. Yellen, eds., Handbook of Graph Theory, CRC Press, 2004, p. 324. P. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969, p. 232. P. Harary and S. M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, NY, 1973, p. 58 and 144. D. E. Knuth, Fundamental Algorithms, 3d Ed. 1997, pp. 286-88. Elena V. Konstantinova and Maxim V. Nivdyuk, "Discriminating tasks of information and sequencing indices. Animals and trees", J. Chem. Inf. Comput. Sci., (2003), vol. 43, 1868-1871, see Table 15, column 1 on page 1868. R. M. Palmer and A. J. Schwenk, On the number of trees in a random forest, J. Combin. Theory, B 27 (1979), 109-121. N. Pippenger, Enumeration of equinequable trees, SIAM J. Discrete Math., 14 (2001), 93-115. R. C. Read and R. J. Wilson, An Atlas of Graphs, Oxford, 1998.</p>	



Computing the Generating Function of a Series Given Its First Few Terms

François Bergeron and Simon Plouffe

CONTENTS

1. Introduction
 2. The Program
 3. Examples
 4. Conclusions
- Acknowledgements
References

We outline an approach for the computation of a good candidate for the generating function of a power series for which only the first few coefficients are known. More precisely, if the derivative, the logarithmic derivative, the reversion, or another transformation of a given power series (even with polynomial coefficients) appears to admit a rational generating function, we compute the generating function of the original series by applying the inverse of those transformations to the rational generating function found.

1. INTRODUCTION

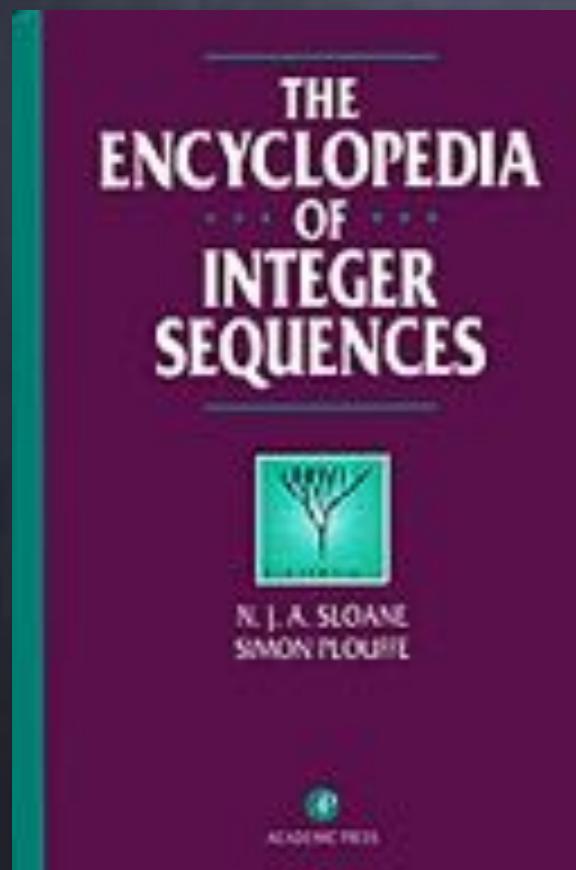
We address the problem of finding the generating function $f(x)$ of a power series

$$\alpha(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

of which we know only a limited number of initial terms. We say that $\alpha(x)$ has precision n if all

EXPERIMENTAL MATHEMATICS

VOLUME 1 (1992)

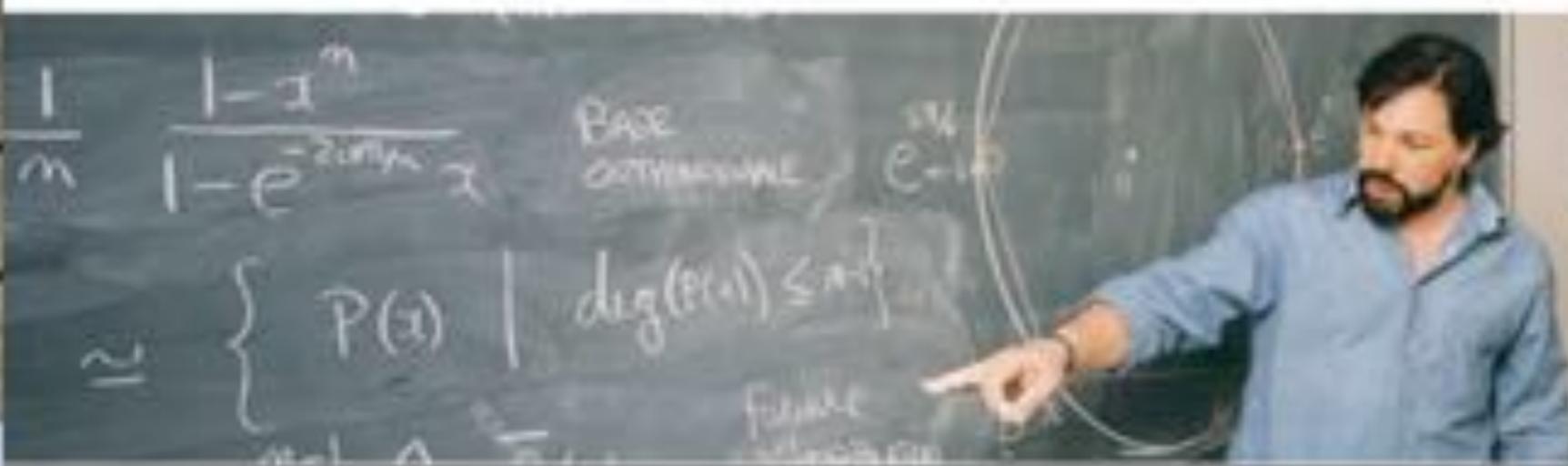


Voir :

- BERGERON. MATH. UQAM.CA

François Bergeron, UQAM

Voir sur



Coordonnées Pictures Resumes Publications De l'auteur Communications Outils Espace enseignant
OpenMath Cours Cours video Rencontres Curiosité Liens interessants

Liens interessants

Coordonnées

Professeur: Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal.

Directeur du [Lacim](#) Laboratoire de recherche en combinatoire et informatique mathématique, professeur du [CRM](#). Aussi membre du [LIRCO](#), un Laboratoire International Affilié au CNRS (France). Membre régulier du [TUMS-CRM-CNRS](#).

Intérêts de recherche: Combinatoire algébrique, Théorie de la représentation des groupes finis, Théorie des fonctions symétriques, Calcul formel. Voir aussi mes pages de résumés.

Adresse (latitude longitude) : 45.500666, -73.566332

Département de Mathématiques,

fin