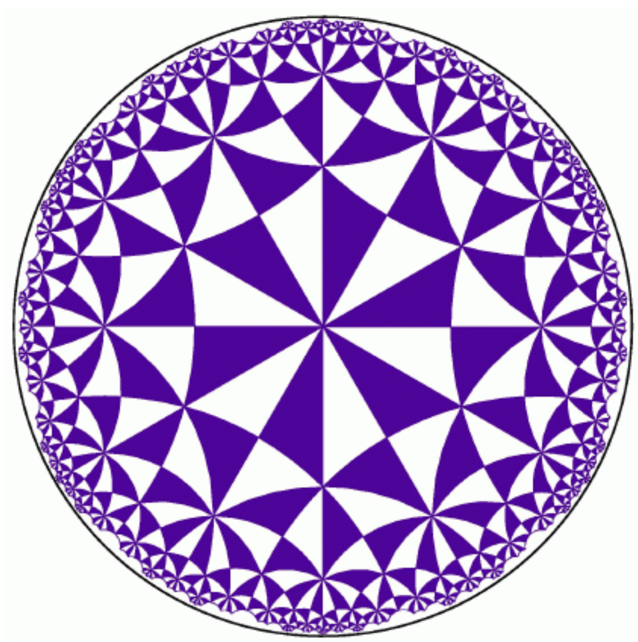
Algèbres de descentes

François Bergeron

27 septembre 2015



UQÀM Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques
Case postale 8888, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3P8

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels sur les notions de descente et de longueur pour les groupes de Coxeter

Ce qui suit est très brièvement présenté, sous forme de rappels. Les lecteurs ayant besoin de plus de détails pourront consulter l'excellent livre de J.E. Humphreys, *Reflection Groups an Coxeter Groups*. Afin de bien comprendre l'origine de la terminologie, il est bien d'amorcer la discussion avec le groupe symétrique S_n. Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on dit qu'une permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ a une **descente** en position i, si et seulement si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. L'ensemble des descentes de σ est désigné par $\mathrm{desc}(\sigma)$. Une **inversion** de σ est un couple (i,j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\sigma_i > \sigma_j$; et l'ensemble des inversions de σ est dénoté par

$$\mathrm{inv}(\sigma) := \big\{(i,j) \;\big|\; i<j \quad \text{et} \quad \sigma_i > \sigma_j\big\}.$$

Le nombre d'inversions de σ est sa **longueur** $\ell(\sigma)$. Cette terminologie trouve sa source dans le fait que

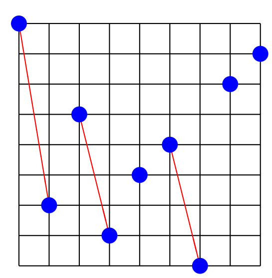


FIGURE 1.1 – Les descentes de 936245178.

$\ell(\sigma)$ est aussi la longueur de l'expression de σ comme produit « réduit » de transpositions adjacentes

$s_i = (i, i+1)$. On dit qu'une expression est **réduite** si elle est de longueur minimale. Chaque expression réduite pour σ correspond à un chemin de longueur minimal entre l'identitié e et σ dans le graphe de Cayley [1] de S_n.

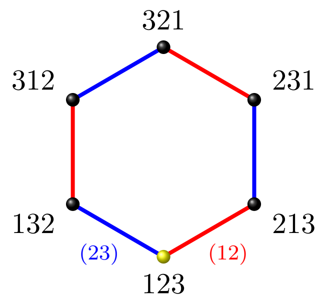


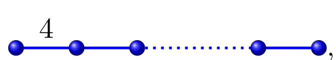
FIGURE 1.2 – Graphe de Cayley de S_3

On observe qu'une transposition de deux valeurs adjacentes dans σ ajoute ou retranche exactement un au nombre d'inversions de σ, ce qui se formule donc comme

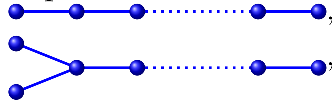
$$\ell(\sigma\, s_i) = \ell(\sigma) \pm 1. \tag{1.1}$$

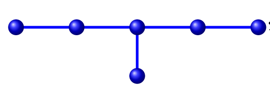
En fait, $i \in \mathrm{desc}(\sigma)$ si et seulement si $\ell(\sigma\, s_i) > \ell(\sigma)$. L'avantage de cette description est qu'elle s'étend à tout groupe de Coxeter (fini). Rappelons qu'un tel groupe W en est un qui admet un ensemble S de générateurs qui sont tous idempotents, c.-à-d. $s^2 = e$ si $s \in S$; avec pour chaque $s, t \in S$ une relation de la forme $(st)^{m_{st}} = e$, où $m_{st} \geqslant 2$. On dit que (W, S) est un **système de Coxeter**. Observons que $m_{st} = 2$ équivault à dire que s et t commutent. On code les relations sous la forme d'un graphe, ayant comme sommets les éléments de S, avec une arête joignant s et t si et seulement si l'entier $m_{st} > 2$. Les arêtes correspondant au cas $m_{st} = 3$ ne sont pas étiquetées. Dans les autres cas on les étiquette par m_{st}. Les groupes de Coxeter irréductibles (voir exercice 1.2) ont été classifiés, et on a la liste complète suivante :

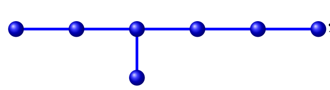
A_n , $(n \geqslant 1)$, groupes symétriques S_{n+1},

B_n 

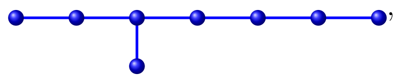
, $(n \geqslant 2)$, groupes hyperoctaédraux,

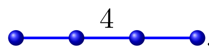
D_n , $(n \geqslant 4)$,

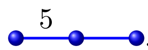
E_6 ,

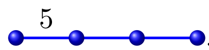
E_7 ,

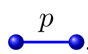
1. Dont les arêtes correspondent aux transpositions.

E_8 ,

F_4 ,

H_3 ,

H_4 ,

$I_2(p)$ , $(p \geqslant 5)$, groupes diédraux,

où les indices correspondent au nombre de générateurs. Le fait que le groupe symétrique S_{n+1} admette une telle présentation est classique. L'ensemble S est l'ensemble des transpositions adjacentes

$$S = \{s_i = (i, i+1) \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\},$$

avec les **relations de tresse**

$$s_i^2 = e, \qquad (s_i s_{i+1})^3 = e, \qquad \text{et} \qquad (s_i s_j)^2 = e, \quad \text{si} \quad |j-i| > 1.$$

Les deux possibilités pour l'ordre d'un produit st correspondent à la présence d'hexagones et des carrés dans le graphe de Cayley de S_n, comme l'illustre la figure 1.3. Le groupe B_n peut s'identifier aux

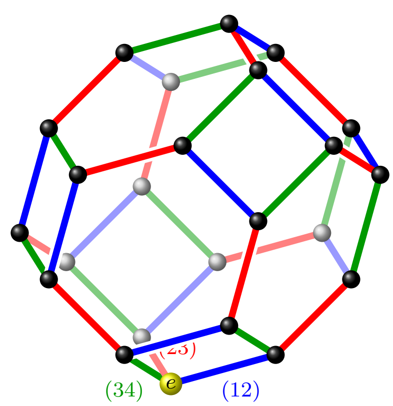


FIGURE 1.3 – Graphe de Cayley de S_4

groupe des matrices $n \times n$, ayant un seul coefficient non nul sur chaque ligne, et sur chaque colone ; ce coefficient étant soit $+1$, soit -1. Son ordre est donc $2^n n!$.

Bien entendu, en général, la longueur $\ell(w)$ d'un élément d'un groupe de Coxeter W se définie tout comme dans le cas de S_n, à savoir

$$\ell(w) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid w = r_1 r_2 \ldots r_k, \quad r_i \in S\}.$$

Par analogie avec le cas du groupe symétrique, pour tout élement w d'un groupe de Coxeter W, on défini ensuite l'ensemble des descentes de w comme

$$\mathrm{desc}(w) := \big\{ s \in S \,\big|\, \ell(w\,s) > \ell(w) \big\}.$$

On peut montrer que (voir [26]), pour tout groupe de Coxeter fini on a

$$\sum_{w \in W} q^{\ell(w)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - q^{d_1}}{1 - q}, \tag{1.2}$$

où n est le nombre d'éléments de S, et les d_i sont certains entiers qu'on appelle **degrés** de W.

Pour K un sous-ensemble de S, on désigne par W_K le sous-groupe de W engendré par K. La fonction longueur ℓ_K de W_K coïncide clairement avec ℓ sur W_K. Les conjugués $w^{-1} W_k w$ de ces groupes sont appelés [2] sous-groupes **paraboliques** de W. Pour $K \subseteq S$, on pose

$$W^K := \{ w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \text{ pour tout } s \in K \},$$

La proposition suivante joue un rôle de premier plan dans notre histoire.

Proposition 1.1. *Tout $w \in W$, s'écrit de manière unique sous la forme $w = uv$, avec $u \in W^K$ et $v \in W_K$, avec*

$$\ell(w) = \ell(u) + \ell(v).$$

De plus, u est l'élément de plus petite longueur de la classe à gauche wW_K.

Tout comme dans [26], on pose

$$X(t) := \sum_{w \in X} t^{\ell(w)},$$

pour tout sous-ensemble X de W, et on dit de $W_K(t)$ que c'est le polynôme de **Poincaré** de W_K. La proposition ci-haut entraîne que

$$W_K(t) W^K(t) = W(t). \tag{1.3}$$

1.2 Réalisation géométrique, et racines

On peut considérer les n générateurs $s \in S$, d'un groupe de Coxeter W, comme des réflexions dans un hyperplan à l'intérieur d'un espace vectoriel V judicieusement construit. Les éléments de W sont alors réalisés comme composés de ces réflexions, et W apparaît comme sous-groupe de $GL(V)$, avec

2. Pour des raisons plus ou moins claires

$\dim(V) = n$. L'espace V est librement engendré par des vecteurs (abstrait) α_s, un pour chaque $s \in S$. On muni V du produit scalaire caractérisé par le fait que

$$\langle \alpha_s, \alpha_t \rangle := -\cos\big(\pi/m_{st}\big),$$

pour lequel les α_s sont normaux. On réalise chaque s comme une « réflexion » $\rho_s : V \to V$, en posant

$$\rho_s(v) := v - 2\langle \alpha_s, v \rangle \alpha_s.$$

En effet, on peut montrer que $\rho_s^2 = \mathrm{Id}$, et que $\text{dét}(\rho_s) = -1$. De plus, $(\rho_s\rho_t)^{m_{st}} = \mathrm{Id}$ dans $GL(V)$, et on peut en déduire qu'on a un monomorphisme de groupes $\rho : W \to GL(V)$. Ainsi, W est réalisé comme groupe engendré par des réflexions. On donne ainsi une interprétation géométrique aux relations des

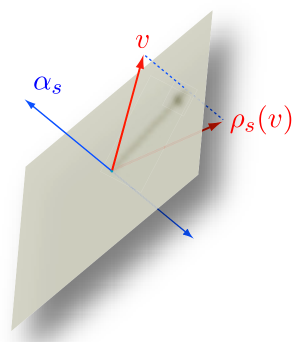


FIGURE 1.4 – Réflexion dans un hyperplan.

générateurs de W, en terme d'angle entre les hyperplans

$$H_s := \big\{ v \in V \mid \rho_s(v) = v \big\},$$

laissés fixes par les ρ_s. Pour que W soit fini, il y a de fortes contraintes sur ces angles. Ce phénomène est illustré à la figure 1.5, pour le groupe B_3.

Par la construction précédente, certains éléments de W, dont les générateurs, correspondent à des réflexions selon des hyperplans. Le **système de racines** associé à W est l'ensemble des vecteurs[3]

$$\Phi := \{\ \alpha \mid s_\alpha \in W \qquad \text{and} \quad |\alpha| = 1\ \}, \tag{1.4}$$

On observe que l'ensemble fini Φ est tel que

(1) si $\alpha \in \Phi$, alors $-\alpha \in \Phi$;

(2) pour $w \in W$ et $\alpha \in \Phi$, alors $w(\alpha) \in \Phi$;

3. Ils sont ici normalisés, mais cela n'est pas toujours le cas. Plus généralement, on considère des systèmes de racines caractérisés par les seules conditions (1) et (2), sans insister sur le fait que les vecteurs impliqués soient normaux.

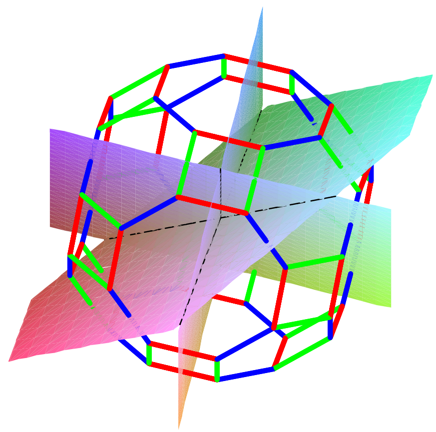


FIGURE 1.5 – Angles entre hyperplans de réflexion.

Le noyau du morphisme naturel de W dans le groupe des permutations de Φ, est trivial.

Les éléments de Φ sont appelés **racines**, et on dit de Φ que c'est un **système de racines**. Clairement $\Delta := \{\alpha_s \mid s \in S\}$ est inclus dans Φ. On dit que ce sont les **racines simples**. Toute racine dans Φ s'exprime comme combinaison linéaire de racines simples (puisqu'elles forment une base) :

$$\alpha = \sum_{s \in S} c_s \, \alpha_s.$$

Cela permet de définir la notion de **racines positives**, à savoir celles pour lesquelles on a $c_s > 0$ pour tout s. Les **racines négatives**, sont celles pour lesquelles on a $c_s < 0$ pour tout s. On désigne respectivement par Φ^+ et Φ^- l'ensemble des racines positives et l'ensemble des racines négatives. On a

(1) $\Delta \subseteq \Phi^+$;

(2) $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$;

(3) la longueur $\ell(w)$ de w, est le nombre de racines positives envoyées par w dans une racine négative.

L'ensemble des hyperplans de réflexions de W est l'ensemble des hyperplans dont l'équation est de la forme

$$\langle \alpha, x \rangle = 0,$$

avec $\alpha \in \Phi^+$. Ceci donne une bijection entre l'ensemble des hyperplans de réflexions de W et l'ensemble Φ^+. L'ensemble des hyperplans en question forme un **arrangement d'hyperplans** dit de Coxeter. La figure 1.6 présente (de deux façons différentes) l'arrangement d'hyperplan associé à $A_3 = S_4$.

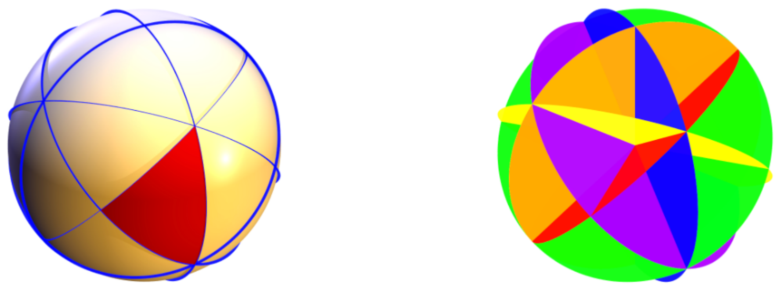


FIGURE 1.6 – Arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{R}_3$, correspondant à A_3

1.3 Idempotents orthogonaux

Soit A une algèbre de dimension finie dont le neutre (pour la multiplication) est désigné par 1. On dit qu'on a une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'**idempotents orthogonaux**, si

$$e_j e_k = \begin{cases} e_j & \text{lorsque, } k = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec les e_i non nuls. Forcément, des idempotents orthogonaux non nuls sont linéairement indépendants, ce qui entraîne que la famille I est finie. On observe que la somme de deux idempotents orthogonaux est aussi un idempotent. Cela suggère de considérer les idempotents qui ne peuvent pas s'écrire comme somme d'idempotents orthogonaux non nuls, c.-à-d.

$$e = f + g, \text{ avec } f^2 = f, \ g^2 = g, \text{ et } fg = 0, \qquad \text{force que} \qquad f = 0 \text{ ou } g = 0.$$

On dit alors que e est un idempotent **primitif**. D'autre part, pour tout idempotent e, on observe que $1 - e$ est aussi un idempotent, qui est orthogonal à e. Il est donc naturel de considérer les familles $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ d'idempotents orthogonaux primitifs telles que

$$\sum_{i\in 1}^{r} e_i = 1.$$

On dit alors qu'on a une famille complète d'idempotents orthogonaux primitifs. L'opérateur qui correspond à la multiplication à droite par un idempotent e donne une projection $A \twoheadrightarrow A\,e$ de A sur le sous-espace

$$A\,e := \{x\,e \mid x \in A\}.$$

Si e est primitif, alors $A\,e$ est isomorphe à une **algèbre de matrices pleine**, c.-à-d. toutes les matrices $n\times n$ pour un certain n. Une algèbre A admet potentiellement plusieurs familles complètes d'idempotents orthogonaux primitifs. Ainsi, l'algèbre des matrices triangulaires supérieures 2×2 à coefficients réels

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

admets les deux familles

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2. *Pour toute algèbre A de dimension finie, il existe une famille complète d'idempotents orthogonaux primitifs*

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_r\},$$

et on a

$$A = A\,e_1 \oplus A\,e_2 \oplus \cdots \oplus A\,e_r, \tag{1.5}$$

où chaque $A\,e_i$ est isomorphe à une algèbre de matrice pleine.

Par exemple, pour un polynôme $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ avec des racines complexes distinctes, on considère l'algèbre $A := \mathbb{C}[x]/\langle p(x) \rangle$. Cette algèbre admet une base (linéaire) d'idempotents orthogonaux primitifs, qui sont donnés par la formule d'interpolation de **Lagrange**, c.-à-d.

$$e_k = \frac{\prod_{i \neq k}(x - a_i)}{\prod_{i \neq k}(a_k - a_i)}. \tag{1.6}$$

Si l'on considère $A = \mathbb{C}[x]/\langle p(x) \rangle$ comme l'anneau des fonctions polynomiales sur la variété discrète constituée des points $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, alors e_k est la fonction qui prend la valeur 1 en a_k, et 0 sur les autres points a_i.

Deux idempotents e et f de A sont dits **associés** si et seulement si $f = ueu^{-1}$ pour un élément inversible de A. Cela induit une relation d'équivalence sur l'ensemble des idempotents primitifs de A, et on dit d'une classe d'équivalence pour cette relation que c'est un **point** de A. La **multiplicité** d'un point est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence correspondante. Une algèbre de matrice « pleine » n'a qu'un seul point, dont la multiplicité est la dimension de l'espace ambiant. L'algèbre $B = \mathbb{C}[x]/(x - a)^k$ n'a qu'un seul point de multiplicité k.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Montrer que dans tout groupe de Coxeter fini,

(a) $\ell(w) = 0$ si et seulement si $w = e$;
(b) $\ell(w) = 1$ si et seulement si $w \in S$;
(c) $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$, pour tout $w \in W$;
(d) $\ell(uv) \leqslant \ell(u) + \ell(v)$, pour tout $u, v \in W$;
(e) $\ell(uv) \geqslant \ell(u) - \ell(v)$, pour tout $u, v \in W$;
(f) $\ell(w\,s) = \ell(w) \pm 1$ pour tout $w \in W$ et $s \in S$;
(g) il y a un unique élément de longueur maximale, désigné par w_0 ;
(h) $\ell(w_0 w) = \ell(w_0) - \ell(w)$, pour tout $w \in W$;
(i) $\mathrm{desc}(w_0) = S$;
(j) il y a un morphisme de groupe $\varepsilon : W \to \{+1, -1\}$ (avec la multiplication comme opération sur cet ensemble), tel que $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$.

Exercice 1.2. Décomposition en produit de groupes de Coxeter.

(a) Montrer que le produit de groupes de Coxeter $W := W_1 \times W_2$ est un groupe de Coxeter, en déterminant explicitement un système de générateurs adéquats pour le groupe W.
(b) Montrer qu'on a un système de Coxeter (W, S), avec S se décomposant comme somme disjointe $S_1 + S_2$ de façon telle que s et t commutent pour tout $s \in S_i$ et $t \in S_2$, si et seulement si W est le produit de deux groupes de Coxeter.
(c) Conclure qu'un groupe de Coxeter est **irréductible**, c.-à-d. qu'il ne se décompose pas comme produit de groupes de Coxeter, si et seulement si son diagramme de Coxeter est un graphe connexe.

Exercice 1.3. Cet exercice concerne la formule (1.2).

(a) Montrer que pour le groupe symétrique, on a

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\ell(\sigma)} = \prod_{i=2}^{n} \frac{1 - q^i}{1 - q}, \tag{1.7}$$

par exemple en analysant les inversions causées par n, et en procédant par récurrence.

(b) Calculer explicitement les degrés pour les groupes diédraux.

Exercice 1.4. Montrer que les e_k données par la formule 1.6 constituent une famille complète d'idempotents orthogonaux primitifs dans l'anneau $A := \mathbb{C}[x]/\langle p(x)\rangle$, quel que soit le polynôme $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ ayant des racines distinctes. Discuter la situation lorsqu'on a des racines multiples.

Chapitre 2

Fonctions quasisymétriques

La théorie des fonctions quasisymétriques prend ses racines dans les travaux de Stanley (voir [35]) sur les P-partages, c.-à-d. les partages associés à un ensemble (partiellement) ordonné P. Elle a ensuite été développée par Gessel (voir [21]).

2.1 Fonctions quasisymétriques

Notre contexte est ici l'anneau gradué (par le degré)

$$\mathbb{Q}[\mathbf{x}] = \bigoplus_{d \geqslant 0} Q_d, \qquad \text{(ou sur un autre corps } \mathbb{K}\text{)}$$

des polynômes sur un ensemble dénombrable de variables $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. La **composante homogène** Q_d, de degré d, admet clairement comme base l'ensemble des monômes $\mathbf{y}^\alpha$, où $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ avec $a_i > 0$ et $d = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, et où $\mathbf{y}$ est un sous-ensemble de k des variables dans $\mathbf{x}$. Considérant sur les variables $\mathbf{x}$ l'ordre $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, et supposant que $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq \mathbf{x}$, avec $y_1 < y_2 < \ldots < y_k$ pour cet ordre, le **monôme** $\mathbf{y}^\alpha$ est

$$\mathbf{y}^\alpha := y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_k^{a_k}.$$

L'action de **Hivert** $f(\mathbf{x}) \mapsto \sigma \cdot f(\mathbf{x})$, des permutations [1] dans S_∞ sur les polynômes $f(\mathbf{x})$ dans $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$, est définie par son effet sur les monômes :

$$\sigma \cdot \mathbf{y}^\alpha := \sigma(\mathbf{y})^\alpha. \tag{2.1}$$

1. Ce sont les bijections de $\{1, 2, 3, \ldots\}$ qui laissent fixes tous les éléments de cet ensemble, sauf un nombre fini, de sorte qu'on peut les présenter comme des permutations de S_n pour n assez grand, avec la convention que tous les entiers plus grands que n sont laissée fixes.

Souligons que l'ensemble de variables

$$\sigma(\mathbf{y}) := \{\sigma(y) \mid y \in \mathbf{y}\},$$

est encore ordonné selon l'ordre de $\mathbf{x}$. Autrement dit, la permutation σ est sans effet sur les variables du monôme qui se retrouve à la fois dans $\mathbf{y}$ et dans $\sigma(\mathbf{y})$. Par exemple, l'effet de $\sigma = 3142$ sur $x_1^2 x_3 x_4^2$ est

$$\sigma \cdot x_1^2 x_3 x_4^2 = x_2^2 x_3 x_4^2,$$

puisque $\sigma(\{1,3,4\}) = \{2,3,4\}$.

Par définition, les **polynômes quasisymétriques** sont ceux qui sont invariants pour l'action de Hivert. L'ensemble de ces polynômes forme un sous-anneau gradué de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$, qu'on dénote par Qsym. Le fait que

$$\mathrm{Qsym} = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathrm{Qsym}_d,$$

soit fermé pour la multiplication n'est pas immédiat. Cela découle de la discussion qui suit, qui passe par la description d'une base explicite de la composante homogène Qsym_d, de degré d. Pour chaque **composition**[2] $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k$ d'un entier d, on considère le polynôme quasisymétrique **monomial**

$$M_\alpha = M_\alpha(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^\alpha,$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des sous-ensembles $\mathbf{y}$ de cardinal k de $\mathbf{x}$. Par exemple, supposant que $i < j$, on a

$$\begin{aligned} M_{21} = M_{21}(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + \ldots + x_i^2 x_j + \ldots \\ M_{12} = M_{12}(\mathbf{x}) &= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_4^2 + \ldots + x_i x_j^2 + \ldots \end{aligned}$$

Il n'est pas trop difficile d'établir une règle de multiplication pour les polynômes quasisymétriques monomiaux. À cette fin, rappelons quelques notions préliminaires. Pour un ensemble A, de variables non commutatives, on considère l'anneau gradué

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2 \oplus \mathbb{A}_3 \oplus \ldots,$$

des polynômes en ces variables. Dans ce cas, la composante homogène $\mathbb{A}_d$, de degré d, admet comme base l'ensemble A^d des **mots** de longueur d sur **l'alphabet** A, c.-à-d.

$$u = u_1 u_2 \cdots u_d, \qquad \text{avec} \qquad u_i \in A.$$

La multiplication dans $\mathbb{Q}[A]$ s'obtient comme extension bilinéaire de la **concaténation**

$$(u_1 u_2 \cdots u_d) \cdot (v_1 v_2 \cdots v_k) = u_1 u_2 \cdots u_d v_1 v_2 \cdots v_k.$$

2. C'est-à-dire que $d = a_1 + a_2 + \ldots a_k$, avec les $a_i > 0$.

Le **mot vide**, dénoté par ε, fait ici office de neutre. Ainsi, les éléments de $\mathbb{A}_d$ prenne la forme

$$f = \sum_{d \geqslant 0} \sum_{u \in A^d} c_u\, u, \qquad \text{avec} \qquad c_u \in \mathbb{Q}.$$

Le **produit scalaire** entre éléments $f = \sum_u f_u\, u$ et $g \sum_u g_u\, u$ de $\mathbb{Q}[A]$, est

$$\langle f \,|\, g\rangle := \sum_u c_u d_u,$$

avec la somme ayant lieu sur tous les mots, lorsque cette somme a un sens. Dans notre contexte cela sera le cas, puisque les expressions considérées seront à support fini. Le **produit de battage** (ou **produit shuffle**) de deux mots u et v se définie récursivement par l'identité

$$u \sqcup\!\sqcup\, v := a \cdot (u' \sqcup\!\sqcup\, v) + b \cdot (u \sqcup\!\sqcup\, v'), \qquad \text{si} \qquad u = a \cdot u',\ \text{et}\ v = b \cdot v',$$

avec le cas limite $u \sqcup\!\sqcup\, \varepsilon = u = \varepsilon \sqcup\!\sqcup\, u$. Par exemple, on a

$$ab \sqcup\!\sqcup\, xy = abxy + axby + axyb + xaby + xayb + xyab$$

C'est un produit associatif, et on l'étend bilinéairement à $\mathbb{Q}[A]$. Lorsque l'alphabet A est muni d'une structure additive (par exemple $A = \mathbb{N}$), on considère aussi le **produit de quasibattage** (ou **produit quasishuffle**) défini par

$$\begin{aligned} \varepsilon \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, u &= u \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, \varepsilon = u, \\ u \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, v &= a \cdot (u' \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, v) + b \cdot (u \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, v') + (a+b) \cdot (u' \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, v') \end{aligned}$$

Par exemple, on calcule que

$$\begin{aligned} 12 \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, 13 = 1213 + 1123 + 1132 + 1123 + 1132 + 1312 \\ 115 + 115 + 133 + 142 + 223 + 232 + 25, \end{aligned} \tag{2.2}$$

puisque

$$\begin{aligned} 2 \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, 13 &= 213 + (123 + 132 + 15) + 33, \\ 12 \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, 3 &= (123 + 132 + 15) + 312 + 42, \\ 2 \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, 3 &= 23 + 32 + 5. \end{aligned}$$

Avec ces outils en main, la règle de multiplication des polynômes quasisymétriques monomiaux prend la forme :

$$M_\alpha M_\beta = \sum_\gamma \langle \gamma \,|\, \alpha \,\tilde{\sqcup\!\sqcup}\, \beta\rangle\, M_\gamma. \tag{2.3}$$

Ainsi, notre calcul en 2.2 entraîne que

$$M_{12}M_{13} = M_{1213} + 2\,M_{1123} + 2\,M_{1132} + M_{1312} + 2\,M_{115} + M_{133} + M_{142} + M_{223} + M_{232} + M_{25}.$$

On peut réexprimer plus simplement le produit dans Qsym en terme d'une autre base $\{P_\alpha\}_\alpha$, introduite par Malvenuto et Reutenauer dans [?]. Avant de procéder à sa description, rappelons quelques notions et notations concernant les compositions. On écrit $\alpha \models d$, si $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k$ est une composition de d. Il est facile de mettre en évidence qu'il y en a 2^{d-1}, grâce à la bijection classique

$$\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k \qquad \longleftrightarrow \qquad S_\alpha := \{a_1, (a_1+a_2), \ldots, (a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})\},$$

entre compositions de d et sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, d-1\}$. Il s'ensuit qu'on a aussi une relation d'ordre $\beta \preceq \alpha$ entre compositions, en transposant à celles-ci l'inclusion des sous-ensembles correspondants $S_\beta \subseteq S_\alpha$. On dit alors que α **raffine** $\beta = b_1 b_2 \cdots b_j$, puisqu'il y a alors une (unique) décomposition

$$\alpha = \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \cdots \alpha^{(j)},$$

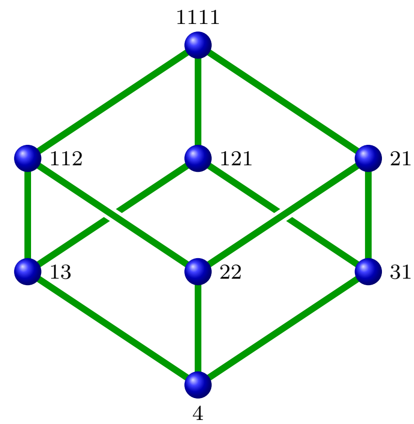


Figure 2.1 – Ordre sur les compositions de 4.

de α en concaténation de compositions $\alpha^{(i)}$ des b_i, c.-à-d. $\alpha^{(i)} \models b_i$. On défini les P_α via les changements de bases explicites

$$P_\alpha = \sum_{\beta \preceq \alpha} \frac{1}{f(\alpha,\beta)} M_\beta \qquad \text{and} \qquad M_\alpha = \sum_{\beta \preceq \alpha} \frac{1}{g(\alpha,\beta)} P_\beta, \tag{2.4}$$

où

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &:= \ell_1!\,\ell_2!\,\cdots\,\ell_j! \\ g(\alpha,\beta) &:= (-1)^{\ell(\alpha)-j}\,\ell_1\,\ell_2\,\cdots\,\ell_j, \end{aligned}$$

avec les $\ell_i := \ell(\alpha^{(i)})$ égaux aux **longueurs** [3] des compositions $\alpha^{(i)}$ apparaissant dans la décomposition $\alpha = \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \cdots \alpha^{(j)}$, qui correspond au fait que $\beta \preceq \alpha$. Par exemple, pour les compositions de 3, on a

$$\begin{aligned} P_3 &= M_3 \\ P_{21} &= M_{21} + \frac{1}{2} M_3 \\ P_{12} &= M_{12} + \frac{1}{2} M_3 \\ P_{111} &= M_{111} + \frac{1}{2} M_{21} + \frac{1}{2} M_{12} + \frac{1}{6} M_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

En terme de la base des $\{P_\alpha\}_\alpha$, il est montré dans [?] que le produit dans Qsym s'exprime plus simplement comme

$$P_\alpha P_\beta = \sum_\gamma \langle \gamma \,|\, \alpha \sqcup\!\sqcup\, \beta \rangle\, P_\gamma. \tag{2.6}$$

3. En général on pose $\ell(\alpha) := k$, si $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k$.

2.2 Polynômes symétriques

L'anneau Λ, des polynômes symétriques, est un sous-anneau gradué de Qsym. Sa composante homogène Λ_d (de degré d) admet comme base l'ensemble $\{m_\lambda\}_{\lambda\vdash d}$ des polynômes symétriques **monomiaux** indexé par les partages[4] λ de d. Rappelons que

$$m_\lambda := \sum_\alpha M_\alpha,$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des compositions $\alpha = \lambda_{\sigma(1)}\lambda_{\sigma(2)}\cdots\lambda_{\sigma(k)}$ obtenues en permutant les parts de $\lambda = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$. Par exemple, $m_{331} = M_{331} + M_{313} + M_{133}$. La dimension de Λ_d est donc égale à $p(n)$, le **nombre de partages** de n.

D'autres bases intéressantes de Λ_d s'obtienne comme suit. On pose

$$\begin{array}{lclcll}
h_\lambda & := & h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_k}, & \text{avec} & h_n := L_n, & \\
e_\lambda & := & e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_k}, & \text{avec} & e_n := M_{11\cdots 1}, & \text{et} \\
p_\lambda & := & p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_k}, & \text{avec} & p_n := M_n. &
\end{array}$$

Rappelons que, pour les fonctions génératrices

$$H(z) := 1 + \sum_{n\geqslant 1} h_n\, z^n, \qquad E(z) := 1 + \sum_{n\geqslant 1} e_n\, z^n, \qquad \text{et} \qquad P(z) := \sum_{n\geqslant 1} p_n\, z^n/n, \tag{2.7}$$

on a les formules et identités suivantes :

$$\begin{array}{rclrcl}
H(z) & = & \displaystyle\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1 - x_i\, z}, & E(z) & = & \displaystyle\prod_{k\geqslant 1} (1 + x_i\, z), \\
H(z) & = & \exp(P(z)), & E(z) & = & \exp(-P(-z)), \\
H(z) & = & E(-z)^{-1}, & P'(z) & = & \dfrac{H'(z)}{H(z)},
\end{array}$$

qui se déduisent les unes des autres.

Une autre base importante est celle des polynômes de Schur, $\{s_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ qu'on peut décrire via la formule déterminantale de Jacobi-Trudi. Pour des raisons qui deviendront claires dans la suite, il est intéressant de les définir pour toute composition α, en posant

$$s_\alpha := \text{dét}\big(h_{\alpha_i+j-i}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant \ell(\alpha)}, \tag{2.8}$$

4. Ce sont les compositions $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$, avec $\lambda_i \geqslant \lambda_i + 1 > 0$. On écrit alors $\lambda \vdash d$.

avec la convention que $h_0 = 1$ et $h_{-n} = 0$. Par exemple, on a

$$s_3 = h_3, \qquad s_{21} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}, \qquad s_{12} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}, \qquad s_{111} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 1 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Soulignons que les parts de $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k$ apparaissent comme indices dans la diagonale principale, c.-à-d.

$$s_{a_1 a_2 \cdots a_k} = \text{dét}\begin{pmatrix} h_{a_1} & & & \\ & h_{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_{a_k} \end{pmatrix}.$$

L'échange de deux lignes adjacentes dans la matrice ainsi associée à α entraîne qu'on a $s_\alpha = -s_\beta$, avec $\beta = b_1 b_2 \cdots b_k$ obtenu de $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_k$ en posant

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = b_2, \quad \ldots \quad b_i = a_{i+1} - 1, \quad b_{i+1} = a_i + 1, \quad \ldots \quad b_k = a_k.$$

Récursivement, il s'ensuit qu'on peut réécrire

$$s_\alpha = \begin{cases} \pm s_\lambda, & \text{pour un certain partage } \lambda, \text{ ou} \\ 0. \end{cases}$$

L'intérêt de ce processus de « redressement » des s_α viens de la Proposition 2.1 de la section suivante.

2.3 Base fondamentale de Qsym

La base des polynômes quasisymétriques fondamentaux $\{L_\alpha\}_\alpha$ se définit simplement comme

$$L_\alpha := \sum_{\alpha \preceq \beta} M_\beta. \tag{2.9}$$

L'inversion de Möbius (ou un argument d'inclusion-exclusion) dans le treillis des sous-ensembles donne facilement que

$$M_\alpha := \sum_{\alpha \preceq \beta} (-1)^{\ell(\beta) - \ell\alpha)} \; L_\alpha. \tag{2.10}$$

Par exemple, on a

$$\begin{aligned} L_3 &= M_3 + M_{21} + M_{12} + M_{111}, & M_3 &= L_3 - L_{21} - L_{12} + L_{111}, \\ L_{21} &= M_{21} + M_{111}, & M_{21} &= L_{21} - L_{111}, \\ L_{12} &= M_{12} + M_{111}, & M_{12} &= L_{12} - L_{111}, \\ L_{111} &= M_{111}. & M_{111} &= L_{111}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1 (Voir [?]). *Si* $f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \, L_\alpha(\mathbf{x})$ *est un polynôme symétrique, alors on a*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \, s_\alpha(\mathbf{x}).$$

Autrement dit, on peut facilement développer dans la base des polynômes de Schur un polynôme symétrique décrit en terme des L_α. Il suffit d'appliquer le processus de redressement ci-haut aux s_α.

Chapitre 3

Algèbres de descentes

3.1 Classes de descentes

On a rappelé au Chapitre 1 les notions de base sur la fonction longueur $\ell : W \to \mathbb{N}$ pour les systèmes de Coxeter (W, S), ainsi que la notion de descente pour les éléments de W. On a donc une descente en s dans S pour w dans W, si et seulement si

$$\ell(ws) = \ell(w) - 1.$$

L'ensemble des descentes de w est donc

$$\mathrm{desc}(w) = \{s \in S \mid \ell(w\,s) = \ell(w) - 1\}.$$

Tout comme Solomon [39], pour T sous ensemble de S, on défini la **classe de descente**

$$X_T = \sum_{w \in W^T} w, \qquad \text{avec} \qquad W^T := \big\{w \in W \;\big|\; \mathrm{desc}(w) \cap T = \varnothing\big\}. \tag{3.1}$$

Dans le cas de $S_n = A_{n-1}$, on peut identifier les sous-ensembles T of S, aux sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ (via $s_i \mapsto i$), qui sont codés (comme au Chapitre 1) sous la forme de compositions de n. Si γ est la composition associée à $T = T_\gamma$, on écrit

$$X_\gamma := \sum_{\mathrm{desc}(\sigma) \cap T = \varnothing} \sigma.$$

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} X_3 &= 123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 \\ X_{21} &= 123 + 213 + 312 \\ X_{12} &= 123 + 132 + 231 \\ X_{111} &= 123. \end{aligned}$$

Bien que la pluspart des résultats concerne tous les groupes de Coxeter finis, nous allons principalement utiliser le cas des groupes symétriques comme tremplin.

3.2 Algèbre de descentes

Le point de départ est le théorème suivant.

Théorème 3.1 (Solomon [39], 1976)**.** *Pour tout système de Coxeter fini (W, S), l'ensemble des combinaisons linéaire des classes de descentes X_T, pour T variant dans l'ensemble des sous-ensembles de S, forme une sous-algèbre de l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[W]$.*

Plus explicitement, Solomon montre que

$$X_R X_T = \sum_{L \subseteq T} a_{RT}^{L} X_L, \tag{3.2}$$

où a_{RT}^{L} est le nombre d'éléments w du groupe, tel que $\mathrm{desc}(w^{-1}) \cap R = \varnothing$ et $\mathrm{desc}(w) \cap T = \varnothing$, avec

$$w^{-1}(R) \cap T = J.$$

Chapitre 4

L'algèbre de battage

L'algèbre de battage (ou algèbre shuffle) est anti-isomorphe à l'agèbre de descentes. Elle apparaît dans plusieurs problèmes de marches aléatoires sur les groupes de Coxeter.

4.1 Algèbre de battage

Considérons l'alphabet $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, avec l'ordre usuel. Pour toute composition $\gamma = c_1 c_2 \cdots c_k$ de n, on factorise le mot $12 \cdots n$ comme produit de concaténation

$$12 \cdots n = w_1 \cdot w_2 \, \cdots \, w_k, \tag{4.1}$$

avec la condition $\ell(w_i) = c_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On introduit alors la **classe de battage**

$$\mathcal{X}_\gamma := w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, w_k. \tag{4.2}$$

Par exemple, pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{22} &= \mathbf{12} \sqcup\!\sqcup\, \mathbf{34} \\ &= \mathbf{1234} + \mathbf{1324} + \mathbf{1342} + \mathbf{3124} + \mathbf{3142} + \mathbf{3412} \end{aligned}$$

Considérons, pour $\sigma \in S_n$, le produit $\sigma \mathcal{X}_\gamma$ dans l'algèbre du gfroupe $\mathbb{Q}[S_n]$. On voit facilement que

$$\sigma \mathcal{X}_\gamma = \sigma_{w_1} \sqcup\!\sqcup\, \sigma_{w_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, \sigma_{w_k}, \tag{4.3}$$

où, pour $w = a_1 a_2 \cdots a_k$, on dénote par σ_w l'image $\sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_k)$ de w par σ. Le lien avec l'algèbre de descente de S_n s'établit via l'anti-isomorphisme

$$\theta(\sum_\sigma f_\sigma \, \sigma) := \sum_\sigma f_\sigma \, \sigma^{-1},$$

qui inverse l'ordre du produit, c.-à-d. $\theta(f \cdot g) = \theta(g) \cdot \theta(f)$.

Lemme 4.1. *Pour toute composition γ de n on a $\mathcal{X}_\gamma = \theta(X_\gamma)$, et*

$$\theta(X_\alpha X_\beta) = \theta(X_\beta)\theta(X_\alpha). \tag{4.4}$$

Pour M, une matrice $k \times h$ à coefficients dans $\mathbb{N}$, soit respectivement $\ell(M) = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$ et $c(M) = (c_1, c_2, \ldots, c_h)$ les vecteur obtenus en sommant les coeeficients selon les lignes et colones de M. On dénote par $w(M)$ la composition obtenue en lisant les coefficients de M, ligne par ligne, en commençant par la ligne du haut. Par exemple, pour la matrice M ci dessous, on a les valeurs pour $\ell(M)$, $c(M)$ et $w(M)$ suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} \ell(M) & = & (2,1,3), \\ c(M) & = & (3,1,2), \\ w(M) & = & (2,1,1,2). \end{array}$$

On observe que $\ell(M)$, $c(M)$, et $w(M)$ son des composition de n, la somme des coefficients de M. La proposition suivante donne une règle de multiplication pour les calsses de battage.

Proposition 4.2 (Garsia-Remmel)**.** *Pour des compositions α et β de n, le produit de $\mathcal{X}_\alpha$ et $\mathcal{X}_\beta$ dans $\mathbb{Q}[S_n]$ est donné par la formule*

$$\mathcal{X}_\alpha \mathcal{X}_\beta = \sum_{\substack{\ell(M)=\alpha \\ c(M)=\beta}} \mathcal{X}_{w(M)}, \tag{4.5}$$

où la somme à lieu sur l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$ qui satisfont les conditions énoncées.

Bibliographie

[1] M. Aguiar et S. Mahajan, *Coxeter Groups and Hopf Algebras*, Fields Institute Monographs, (**2006**).

[2] D. Aldous et P. Diaconis, *Shuffling Cards and Stopping Times*, American Mathematical Monthly, 93, (**1986**), 333–348.

[3] M. Barr, *Harrison homology, Hochschild homology and triples*, Journal of Algebra, 8, **1963**, 314–323.

[4] D. Bayer et P. Diaconis, *Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair* Annals of Probability **2**, (**1992**), 294–313.

[5] F. Bergeron et N. Bergeron, *A Decomposition of the Descent Algebra of the Hyperoctahedral Group I*, Journal of Algebra **148**, (**1992**), 86–97.

[6] F. Bergeron et N. Bergeron, *Orthogonal Idempotents in the Descent Algebra of B_n and Applications*, Journal of Pure and Applied Algebra, **79**, (**1992**), 109–129.

[7] F. Bergeron, N. Bergeron et A. Garsia, *Idempotents for the Free Lie Algebra and q-Enumeration*, IMA Volumes in Math. **19**, Springer-Verlag, (**1989**), 166–190.

[8] F. Bergeron, N. Bergeron, R. B. Howlett et D. E. Taylor, *A Decomposition of the Descent Algebra of Finite Coxeter Groups*, Journal of Algebraic Combinatorics, Vol. 1, No. 1, (**1992**), 23–42

[9] F. Bergeron, A. Garsia, et C. Reutenauer, *Homomorphisms Between Solomon's Descent Algebras*, J. Algebra, **150**, (**1992**), 503–519.

[10] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **67**, Cambridge University Press, (**1998**).

[11] N. Bergeron, *A Hyperoctahedral Analogue of the Free Lie Algebra*, J. Comb. Theory Ser. A, **58**, (**1991**), 256–278.

[12] N. Bergeron, *A Decomposition of the Descent Algebra of the Hyperoctahedral Group II*, J. Algebra **148**, (**1992**), 98–122.

[13] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6, Éléments de Mathématiques*, Masson, (**1981**).

[14] R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type : Conjugacy Classes and Complex Characters*, John Wiley and Sons, (**1985**).

[15] R. W. Carter, *Conjugacy Classes in the Weyl Group*, Compositio Math. **25**, (**1972**), 1–59

[16] A. Garsia, *Combinatorics of the Free Lie Algebra and the Symmetric Group*, Analysis, et cetera, Research papers published in honor of Jurgen Moser's 60th birthday, ed : Paul H. Rabinowitz and Eduard Zehnder, Academic Press, (**1990**).

[17] A. Garsia et J. Remmel, *Shuffles of Permutations and the Kronecker Product*, Graphs Combin. **1**, (**1985**), 217–263.

[18] A. Garsia et C. Reutenauer, *A Decomposition of Solomon's Descent Algebras*, Adv. in Math. **77**, No 2, (**1989**), 189–262.

[19] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. in Math., **112**, (**1995**), 218–348.

[20] M. Gerstenhaber et S. D. Schack, *A Hodge-type Decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **48**, (**1987**), 229–247.

[21] I. Gessel, *Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions*, Contemporary Mathematics **34**, (**1984**), 289–317.

[22] P. Hanlon, *The Action of $\mathcal{S}_n$ on the Components of the Hodge Decomposition of Hochschild Homology*, Mich. Math. J. **37**, (**1990**), 105–124.

[23] M. E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), no. 1, 49–68.

[24] V. Jones, *Index for subfactors*, Inv. Math. **72**, (**1983**), 1–25.

[25] R. B. Howlett, *Normalizers of Parabolic Subgroups of Reflection Groups*, J. London Math. Soc. **21**, (**1980**), 62–80.

[26] J. E. Humphreys *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, (**1990**).

[27] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Inv. Math. **96**, (**1989**), 205–230.

[28] J.-L. Loday et C. Procesi, *Cyclic homology and lambda operations*, Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), 209–224, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (**1989**).

[29] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, (**1995**), With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[30] C. Malvenuto et C. Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, Journal of Algebra, **177**, (**1995**), 967–982.

[31] P. Orlik et H. Terao, *Hyperplane Arrangements*, Kluwer Academic Publishers, (**1992**).

[32] C. Reutenauer, *Free Lie Algebra*, Clarendon Press, (**1993**).

[33] C. Reutenauer, *Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt and Symmetric group representations of degrees equal to Stirling numbers*, In : *Colloque de combinatoire Énumérative, Montréal, 1985*, Lecture Note in Math. **1234**, Springer-Verlag, (**1986**), 267–293.

[34] B. Sagan, *The Symmetric Group*, Wadsworth and Brooks, (**1991**).

[35] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 2, Cambridge University Press, (**1999**).

[36] J. P. Serre, *Linear Representations of Finite groups*, Springer-Verlag, (**1977**).

[37] G. C. Shephard et J. A. Todd, *Finite Unitary Reflection Groups*, Canadian J. Math. **6**, (**1954**), 274–304.

[38] L. Solomon, *Invariants of Finite Reflection Groups*, Nagoya Math. J. **22**, (**1963**), 57–64.

[39] L. Solomon, *A Mackey Formula in the Group Ring of a Coxeter Group*, J. Algebra **41**, (**1976**), 255–264.

[40] R. Steinberg, *Endomorphisms of Linear Algebraic Groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **80**, (**1968**), 1–108.