

COMBINATORICS AND ABSTRACT ALGEBRA

PHYSICS

GEOMETRY

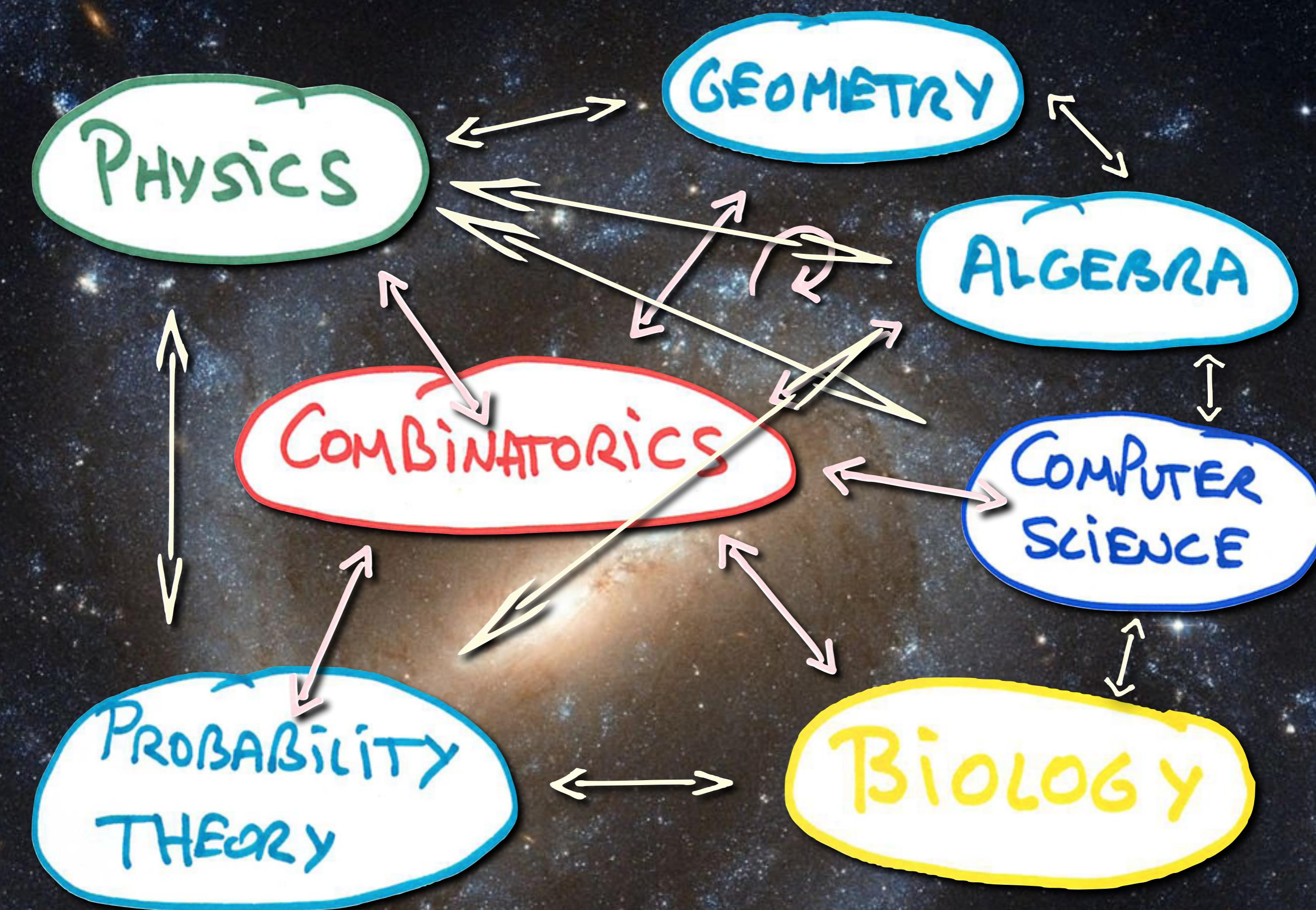
ALGEBRA

COMBINATORICS

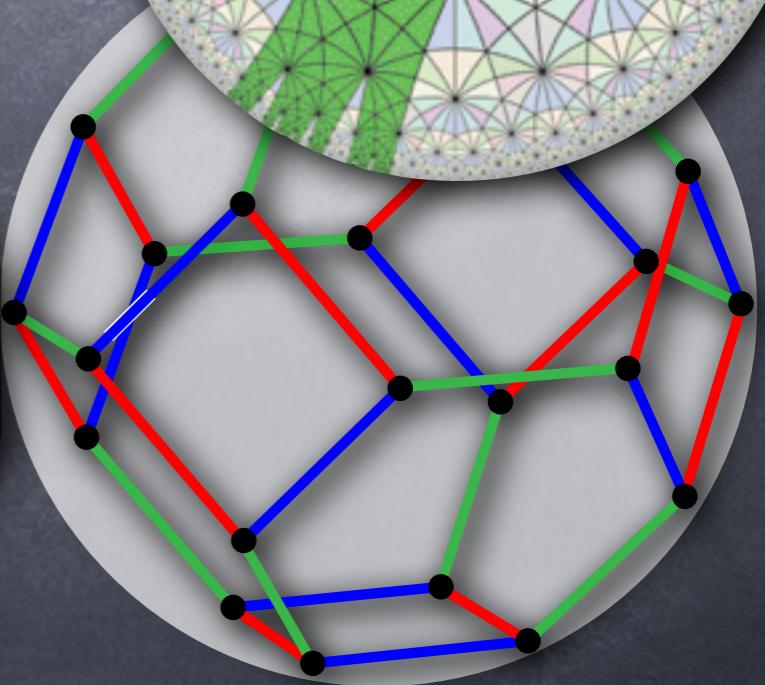
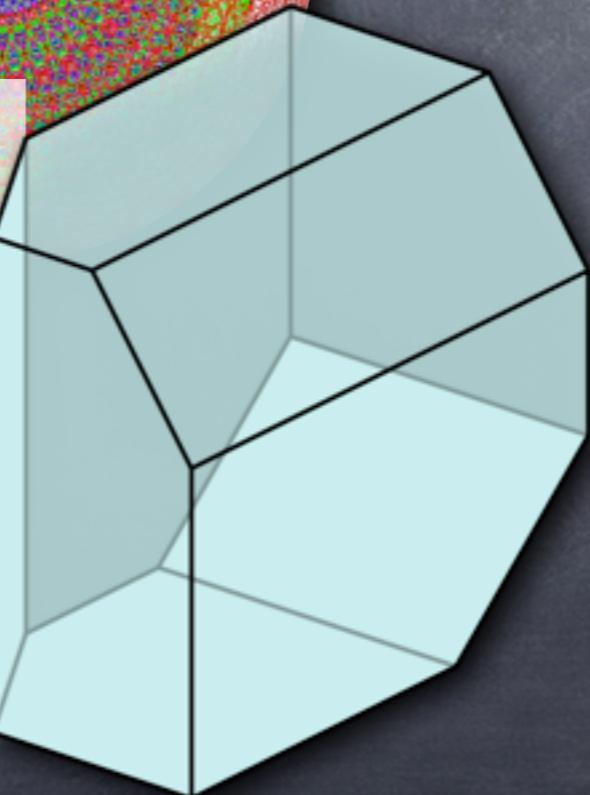
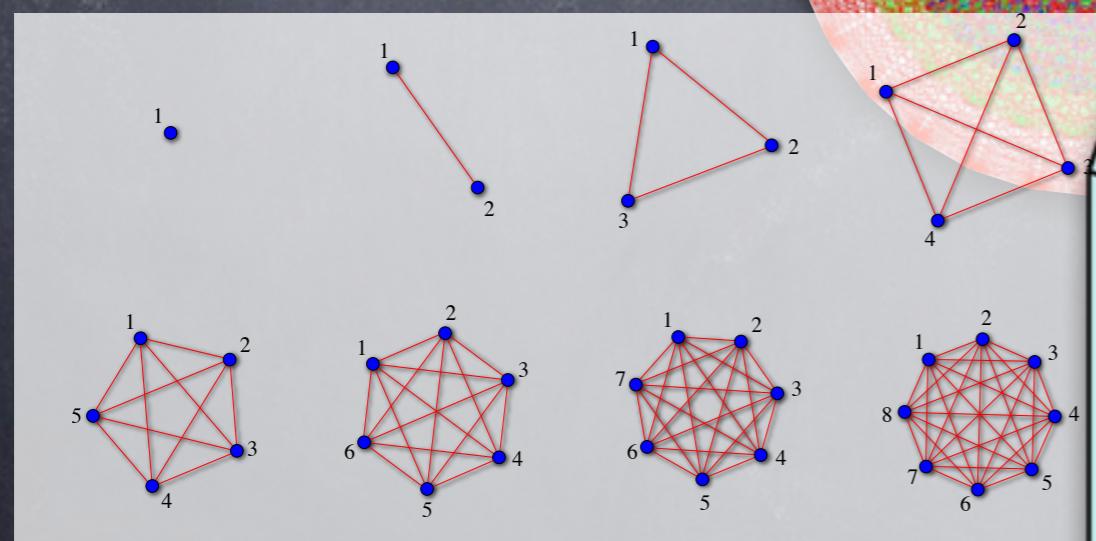
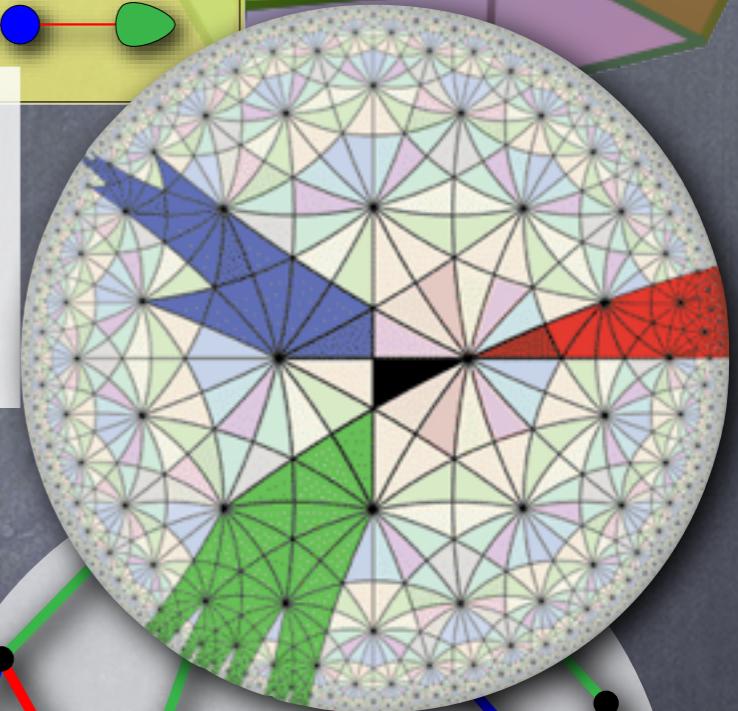
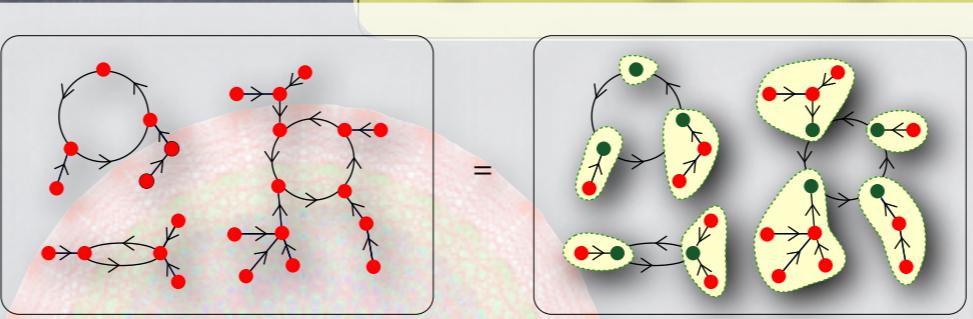
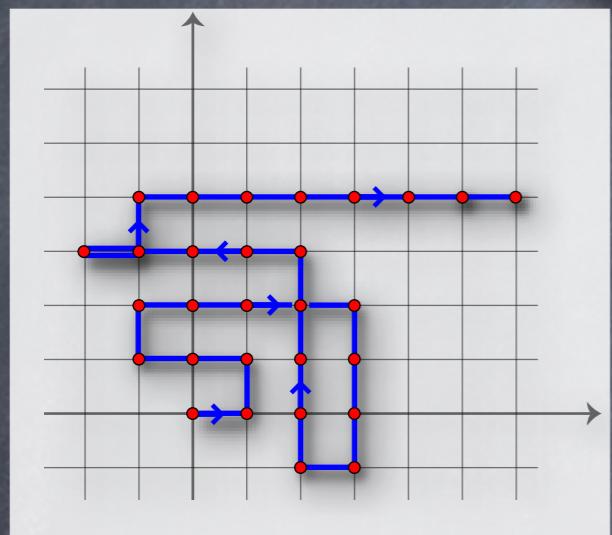
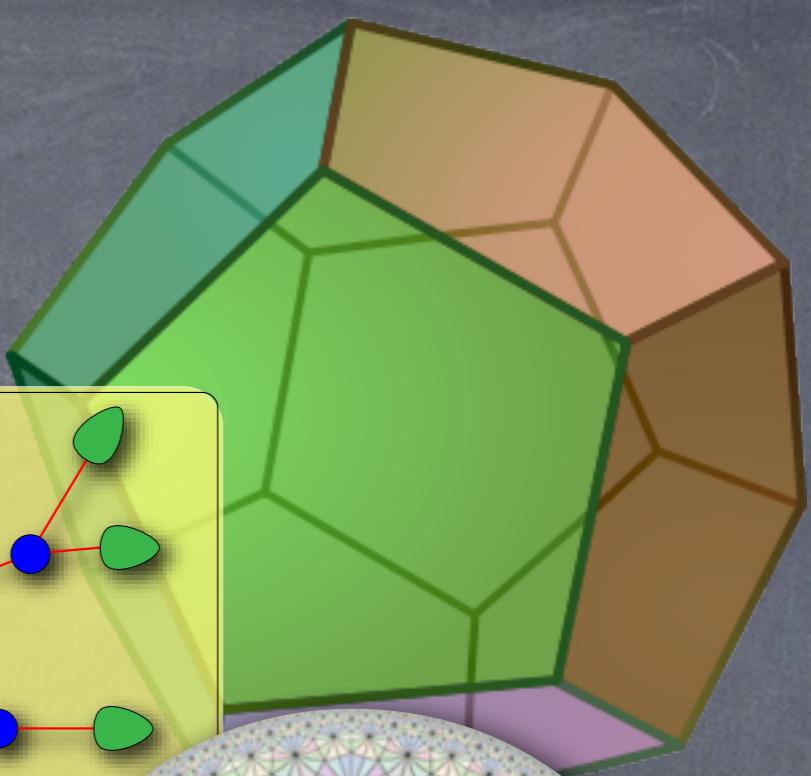
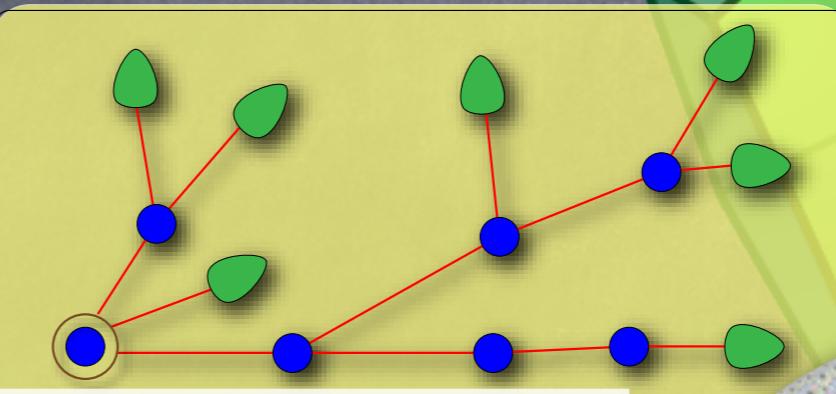
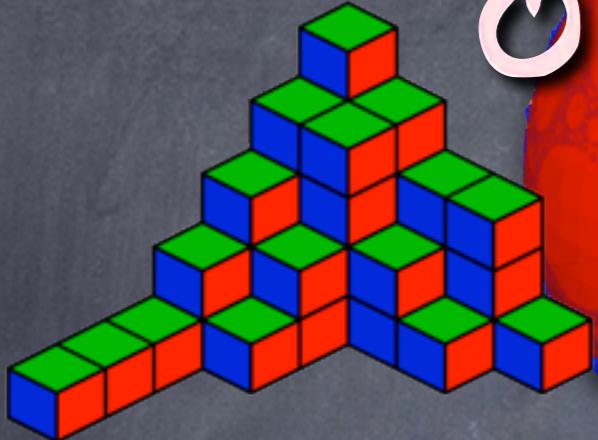
COMPUTER
SCIENCE

PROBABILITY
THEORY

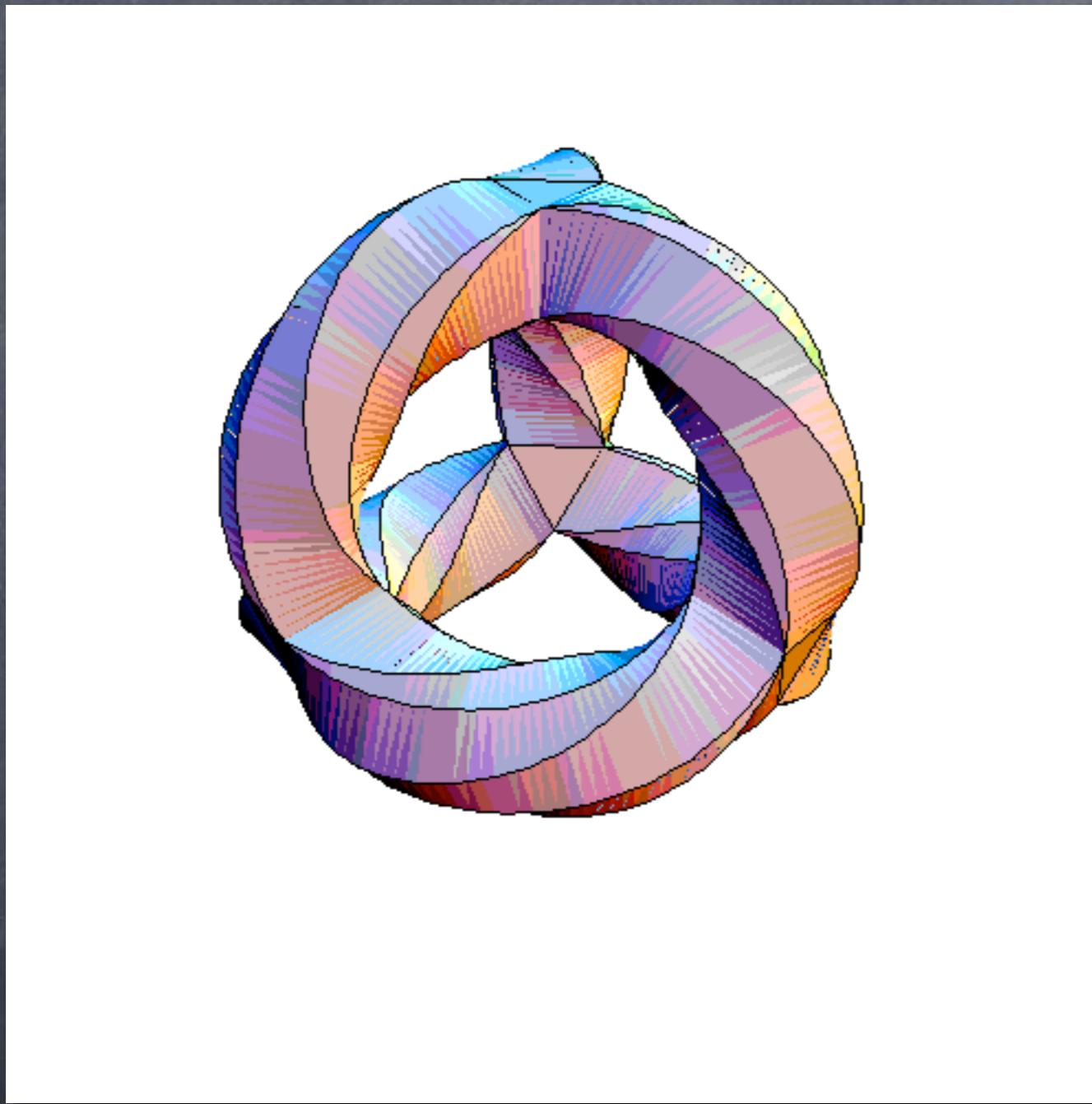
BIOLOGY



COMBINATORIAL OBJECTS



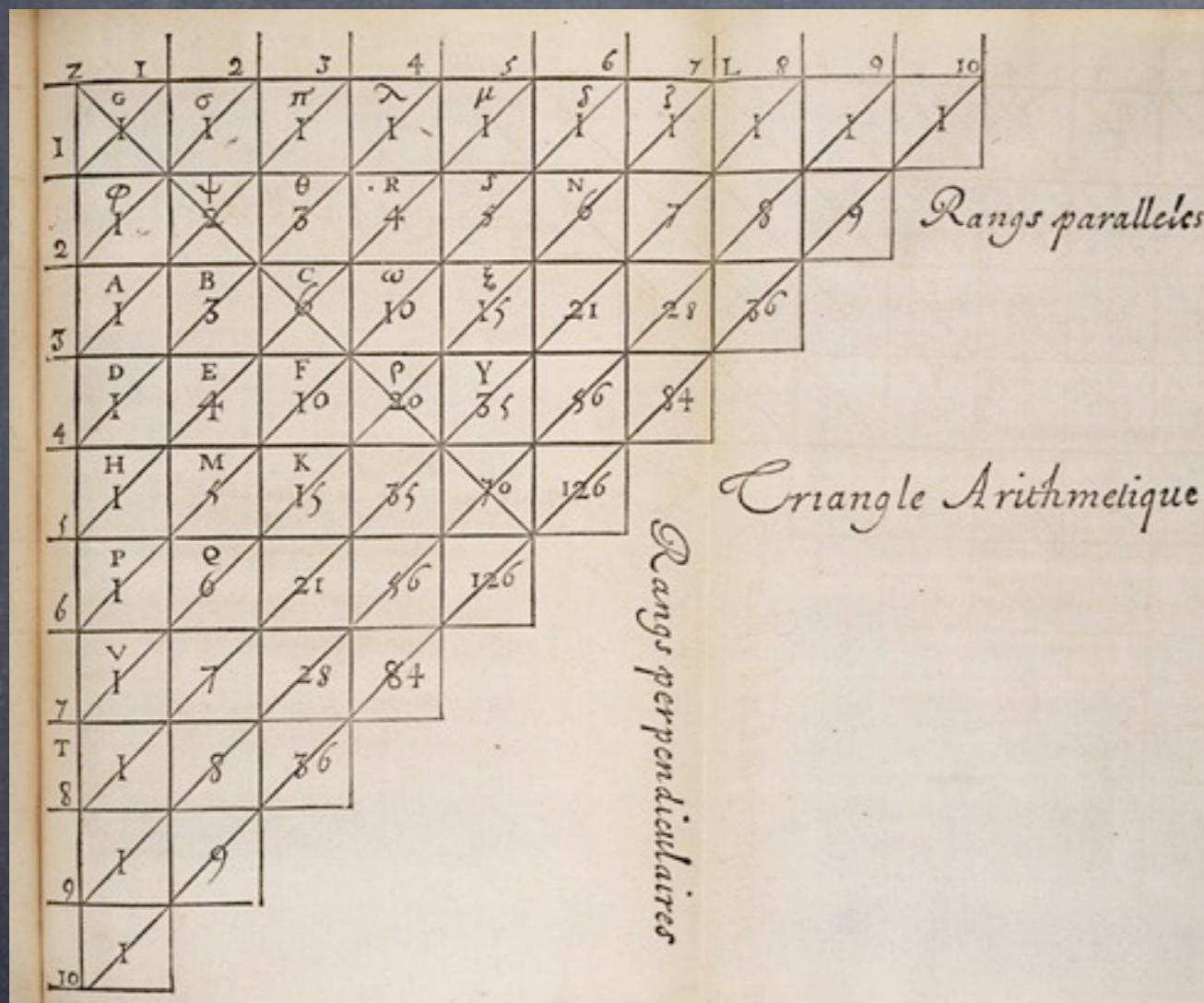
SYMMÉTRIES



ALGEBRA

PASCAL TRIANGLE

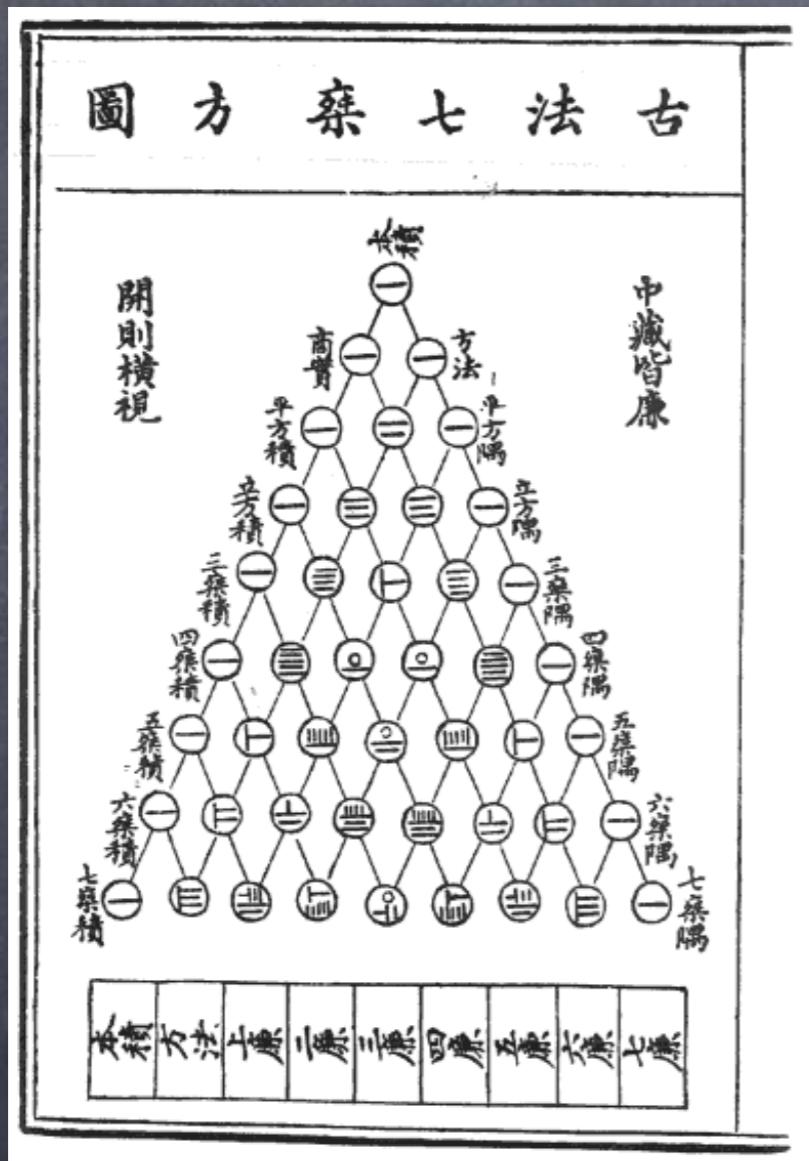
XVII CENTURY



BLAISE PASCAL
(1623-1662)

Hui TRIANGLE

XIV CENTURY



YANG Hui
(~1238 - 1298)

PASCAL TRIANGLE

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! := 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

$\binom{m}{k}$ PATHS

$m = k + \ell$



$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

k



ℓ

ALGEBRA

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x + y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

BINOMIAL COEFFICIENTS

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

$$(x+y)^m = (x+y)^{m-1} (x+y)$$

$$e^{(x+y)t} = 1 + \dots + (x+y)^m \frac{t^m}{m!} + \dots$$

$$e^{(x+y)t} = e^{xt} e^{yt}$$

$$e^{xt} e^{yt} = 1 + \dots + \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) \frac{t^m}{m!} + \dots$$

MULTINOMIAL COEFFICIENTS

$$(x+y+z)^n = \sum_{a+b+c=n} \binom{n}{a,b,c} x^a y^b z^c$$

$$\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a! b! c!}$$

Likewise for

$$(x+y+z+t)^n$$

A LETTER OF EULER TO GOLDBACH 1751



LEONHARD PAUL EULER
(1707 - 1783)

es leicht zu demonstrieren ist, dass alsdann auch seyn wird
 $\beta\beta + \gamma\gamma + (\delta + pu)^2 + 8 = (b + pu)^2 + (c + 2u)^2 + (d + 2u)^2$,
si ponatur $u = (\delta - b)p - (c + d)$. Ich weiss gar wohl,
dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden
kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen for-
mulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art
immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhic
 $\delta + pu = A$, $b + pu = B$, $c + 2u = C$, $d + 2u = D$, so
entsteht daraus diese aequatio infinites generalior

$$\begin{aligned}\beta\beta + \gamma\gamma + (A + PU)^2 + 8 = \\ (B + PU)^2 + (C + 2U)^2 + (D + 2U)^2,\end{aligned}$$

wenn P numerum integrum quemcunque bedeutet und

$$U = (A - B)P - (C + D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n + 4$
allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicu-
cum est = 2, aber nicht allezeit in quatuor quadrata imparia,
quorum summa radicum est = 0, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa
quatuor quadratorum, quorum summa radicum est = 0, in
tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque qua-
drata, quorum summa radicum = 0, allezeit in quatuor qua-
drata die man angeben kann, resolviret werden könne,
weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele casus,
da solches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht
= 0 ist, also ist z. Ex.

$$\begin{aligned}(2 + pp)b - c - d - e)^2 + (c - 2b)^2 + (d - 2b)^2 + \\ (e - 2b)^2 + 4ppbb =\end{aligned}$$

his quatuor $(4 + pp)b - c - d - e)^2 + cc + dd + ee$.

Goldbach.

LETTRE CXL.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Recherche sur le nombre des manières dont un polygone
peut être partagé en triangles par des diagonales.

Berlin d. 4. September 1751.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrach-
tung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch
diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Unter-
suchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald
nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund
des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass
eine summa quatuor quadratorum $aa + bb + cc + dd$, quo-
rum summa radicum $a + b + c + d = 0$, allzeit in drey
quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen,
da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$\begin{aligned}aa + bb + cc + dd = aa + bb + cc + (a + b + c)^2 = \\ (a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2.\end{aligned}$$

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könne, so oft die summa radicum $a + b + c + d + e = 0$. Allein aus dem Vorigen erhellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengenommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzugeben, davon nicht vier zusammengenommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$\begin{aligned} a \ldots b \ldots c \ldots d &= 0 \\ a \ldots b \ldots c \ldots e &= 0 \\ a \ldots b \ldots d \ldots e &= 0 \\ a \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \\ b \ldots c \ldots d \ldots e &= 0 \end{aligned}$$

wo das Zeichen \ldots statt \pm gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formuln nur eine enthalten ist, die $= 0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa + bb + cc + dd + ee$$

sich in summam quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa + bb + cc + dd = \square + \square + \square,$$

wenn $a + b + c + d = 0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey

quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa + bb + cc + dd$ so beschaffen, dass $a + b + c + d = 2$, so ist $aa + bb + cc + dd = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2 + 1$; folglich ist $aa + bb + cc + dd - 1$ in drey quadrata resolubel. Da nun $8n+3$ in drey quadrata resolubel, wenn man setzt

$$\begin{aligned} 8n+3 &= (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2, \\ \text{so wird } 8n+4 &= aa + bb + cc + dd \text{ dergestalt, dass} \\ a+b+c+d &= 2; \end{aligned}$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano hergeleitet haben.

Ich bin mir nicht wie vielerley nallinien

Also es diagonalen in zwey t

Ein F drey triangula verschieden

len, welche betrifft, auf durch Diagonale.

er durch die weyerley Art

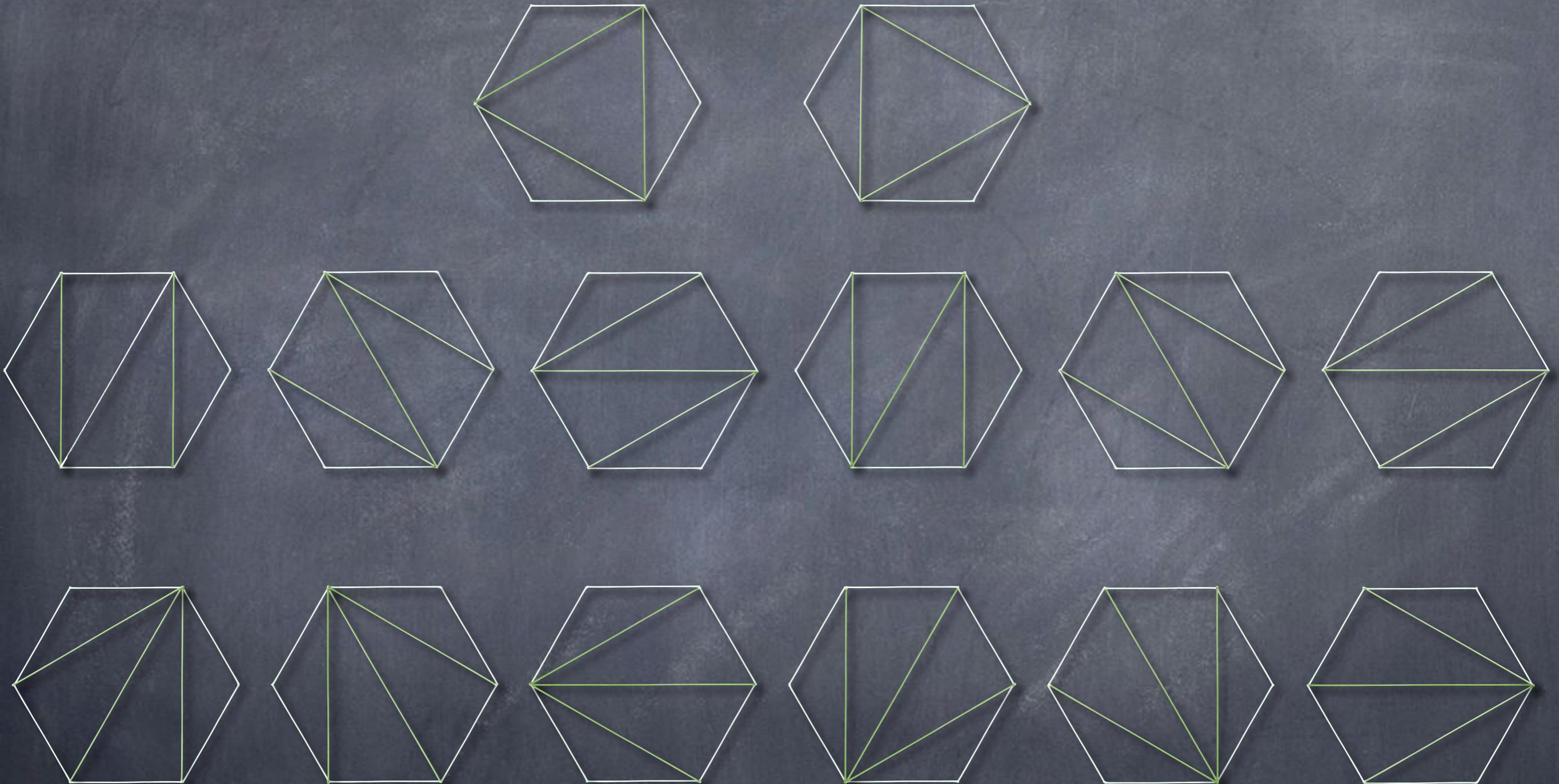
diagonales auf fünferley die diagonales

I. ac, ad . II. bd, be . III. ca, ce . IV. db, da , V. ec, eb .

Ferner wird ein Sechseck durch drey diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-2$ triangula zerschnit-

TRIANGULATIONS



CATALAN NUMBERS

1 2 5 14 42 132 ...

ANTU MING (1692-1763) 1730

JOHAN ANDREAS VON SEGNER 1761 (1704 - 1777)

EUGÈNE CHARLES CATALAN 1838 (1814 - 1894)

ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

$$\text{wenn } n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$\text{so ist } x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430.$$

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \dots (4n - 10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots (n - 1)}$$

$$\text{oder es ist } 1 = \frac{1}{2}, 2 = 1 \cdot \frac{6}{3}, 5 = 2 \cdot \frac{10}{4}, 14 = 5 \cdot \frac{14}{5},$$

$42 = 14 \cdot \frac{18}{6}$, $132 = 42 \cdot \frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerkt,

dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques.

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5aa + 14a^3 + \text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficienes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A \dots 1 + ba + caa + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coëfficienes bereits exprimiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

EULER WRITES THAT

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2^n}{n}$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = 1 + 1 \cdot z + 2 \cdot z^2 + 5 \cdot z^3 + 14 \cdot z^4 + \dots$$

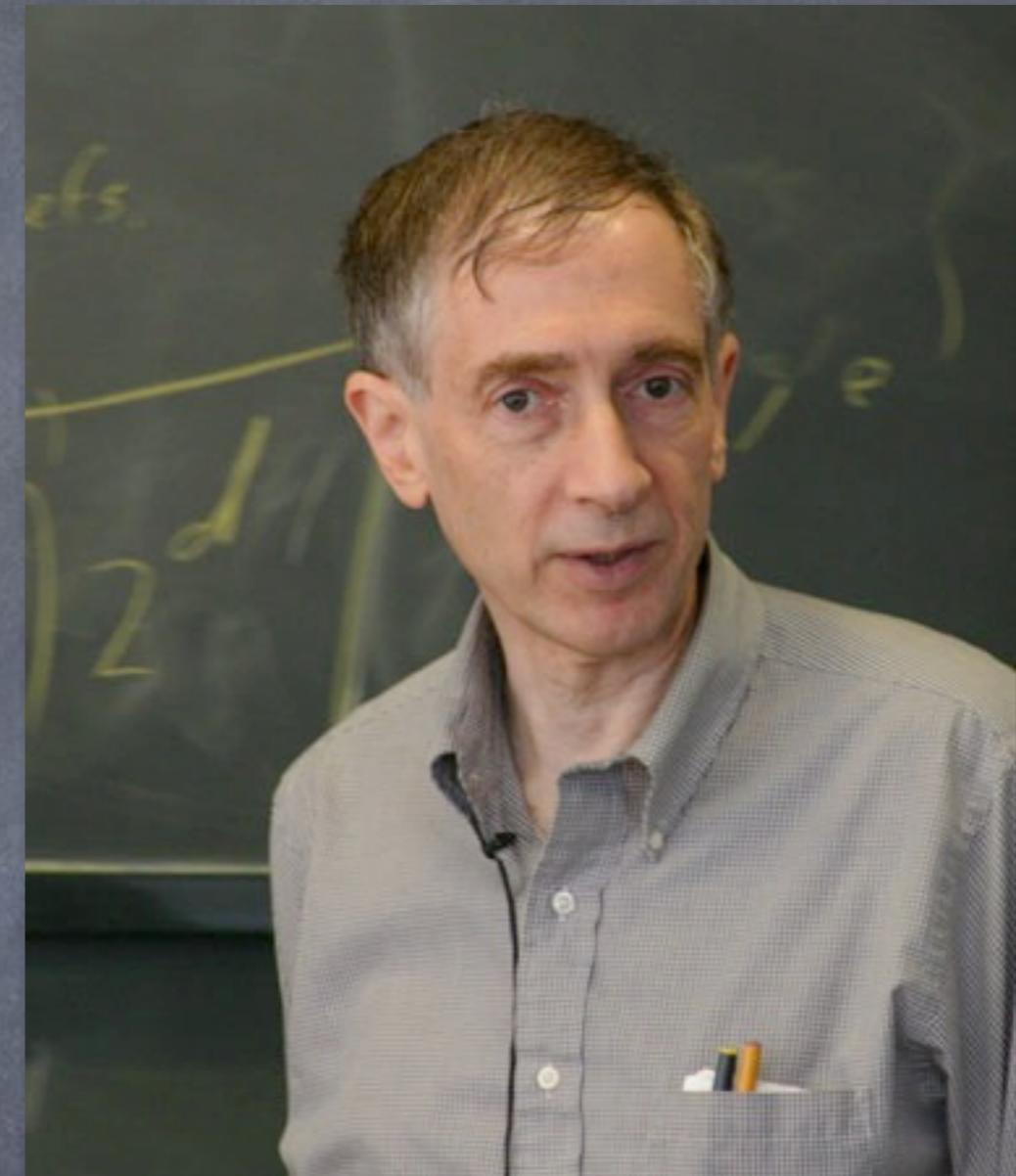
$$\xi(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62

Enumerative Combinatorics

Volume 2

RICHARD P. STANLEY



RICHARD P. STANLEY
MIT

undefined terminology clear. (The terms used in (vv)–(yy) are defined in Chapter 7.) Ideally S_i and S_j should be proved to have the same cardinality by exhibiting a simple, elegant bijection $\phi_{ij} : S_i \rightarrow S_j$ (so 4290 bijections in all). In some cases the sets S_i and S_j will actually coincide, but their descriptions will differ.

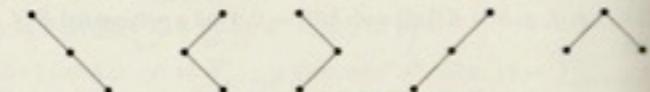
a. Triangulations of a convex $(n+2)$ -gon into n triangles by $n-1$ diagonals that do not intersect in their interiors:



b. Binary parenthesizations of a string of $n+1$ letters:

$$(xx \cdot x)x \quad x(xx \cdot x) \quad (x \cdot xx)x \quad x(x \cdot xx) \quad xx \cdot xx$$

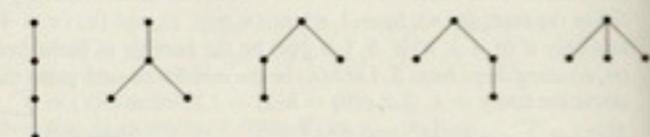
c. Binary trees with n vertices:



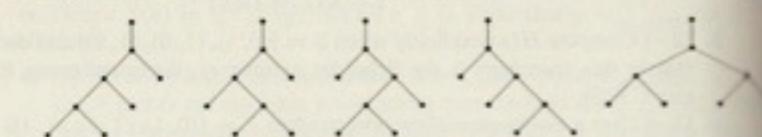
d. Plane binary trees with $2n+1$ vertices (or $n+1$ endpoints):



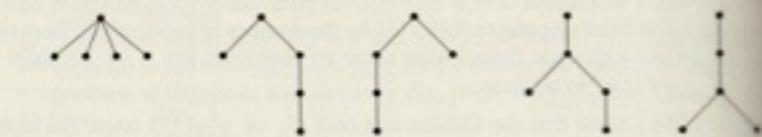
e. Plane trees with $n+1$ vertices:



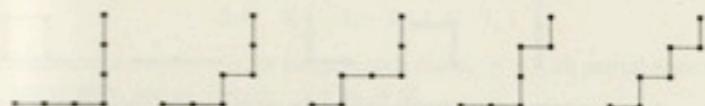
f. Planted (i.e., root has degree one) trivalent plane trees with $2n+2$ vertices:



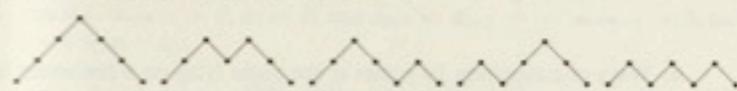
g. Plane trees with $n+2$ vertices such that the rightmost path of each subtree of the root has even length:



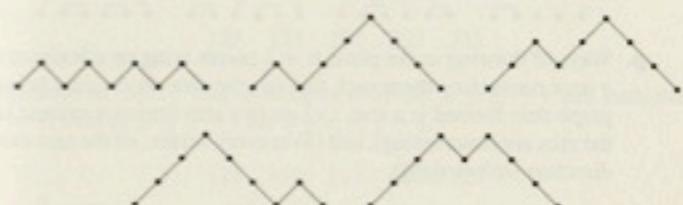
h. Lattice paths from $(0, 0)$ to (n, n) with steps $(0, 1)$ or $(1, 0)$, never rising above the line $y = x$:



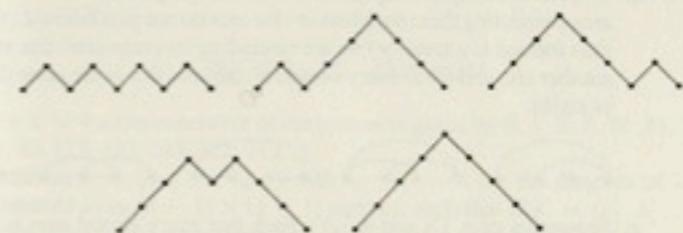
i. Dyck paths from $(0, 0)$ to $(2n, 0)$, i.e., lattice paths with steps $(1, 1)$ and $(1, -1)$, never falling below the x -axis:



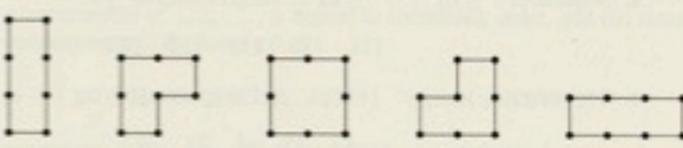
j. Dyck paths (as defined in (i)) from $(0, 0)$ to $(2n+2, 0)$ such that any maximal sequence of consecutive steps $(1, -1)$ ending on the x -axis has odd length:



k. Dyck paths (as defined in (i)) from $(0, 0)$ to $(2n+2, 0)$ with no peaks at height two



l. (Unordered) pairs of lattice paths with $n+1$ steps each, starting at $(0, 0)$, using steps $(1, 0)$ or $(0, 1)$, ending at the same point, and only intersecting at the beginning and end:

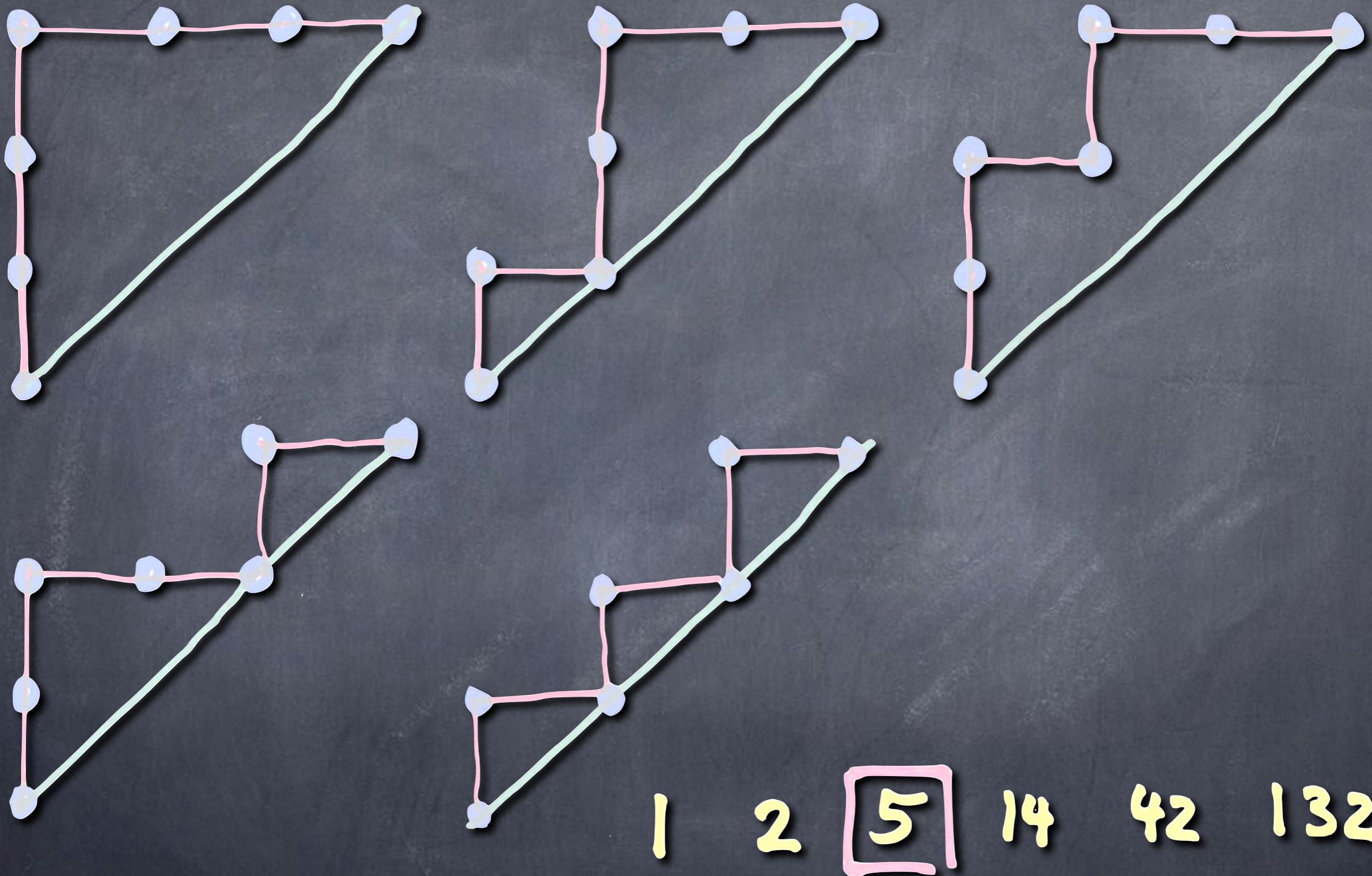


m. (Unordered) pairs of lattice paths with $n-1$ steps each, starting at $(0, 0)$, using steps $(1, 0)$ or $(0, 1)$, ending at the same point, such that one path never

165

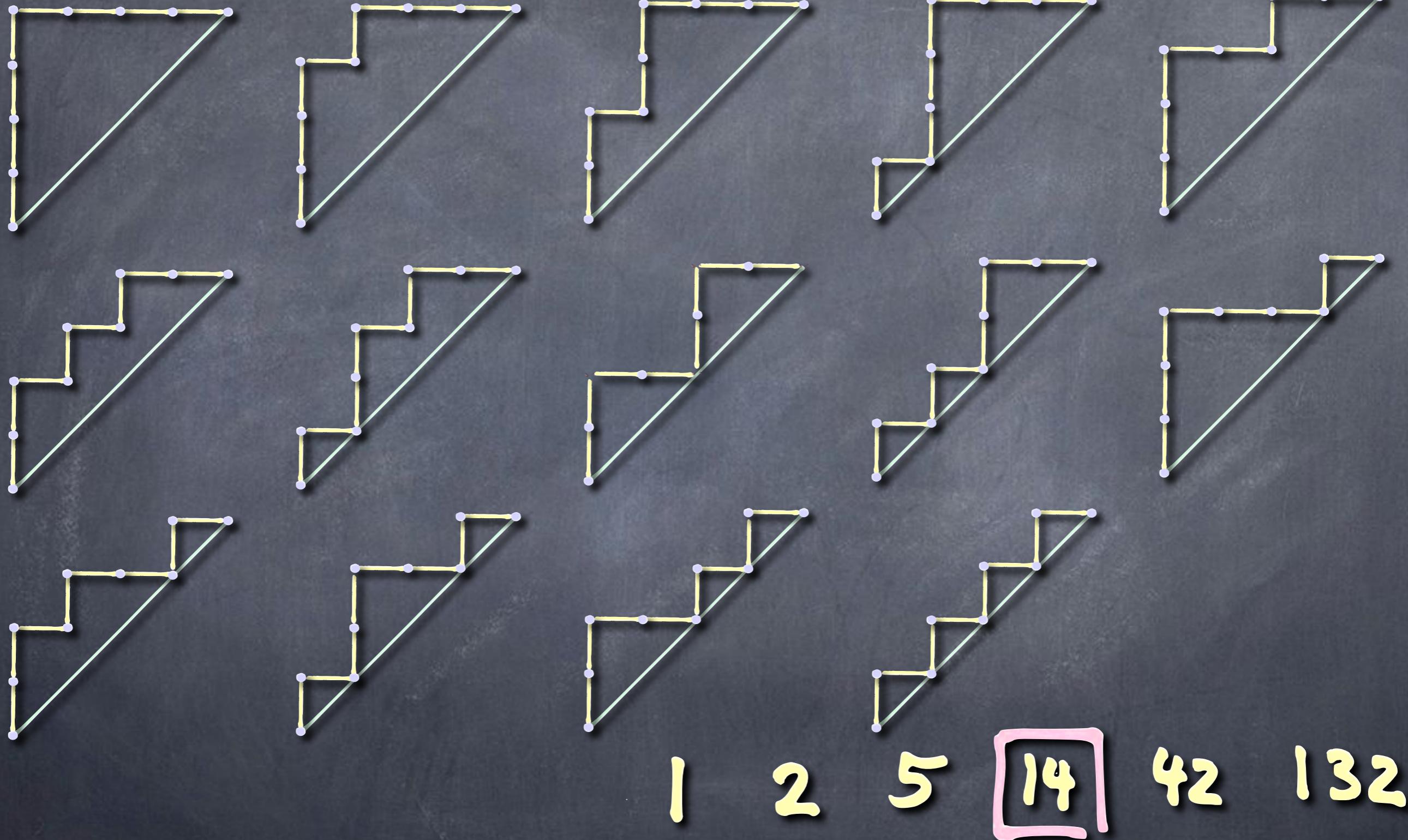
- 6.19. [1]–[3+] Show that the Catalan numbers $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ count the number of elements of the 66 sets S_i , $(a) \leq i \leq (nn)$, given below. We illustrate the elements of each S_i for $n = 3$, hoping that these illustrations will make any

DYCK PATHS

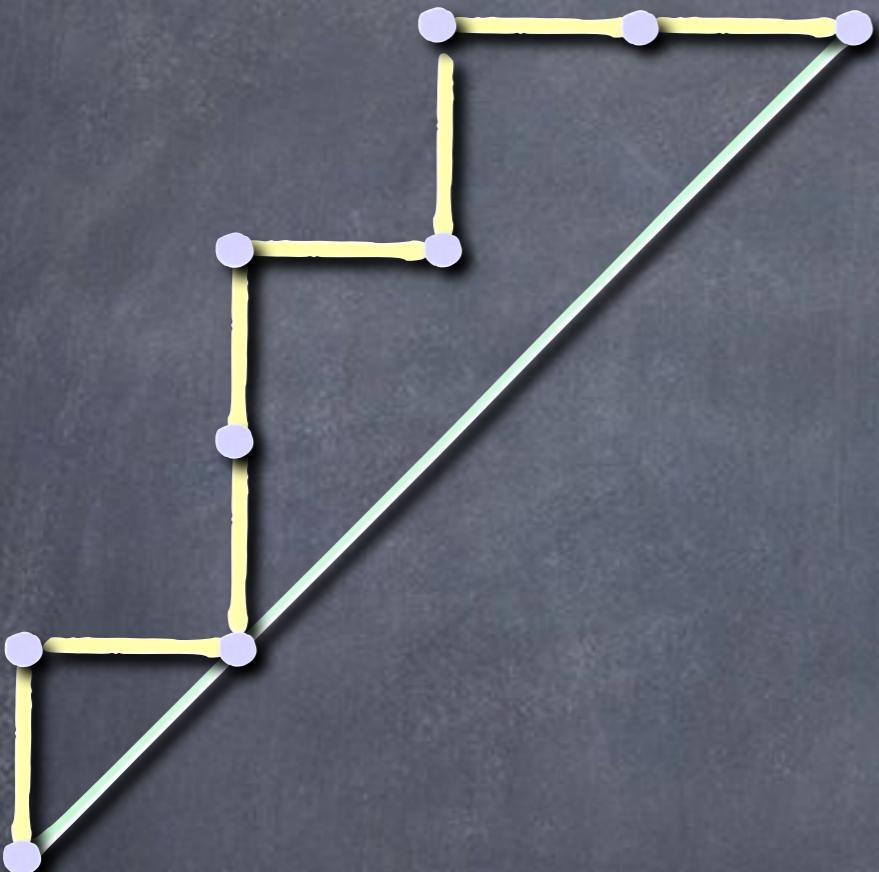


1 2 5 14 42 132

DYCK PATHS



DYCK PATHS



VON DYCK
(1856-1934)

RECURSIVE DECOMPOSITION

$$\wp(z) = \frac{1}{(1 - z \wp(z))}$$

$$\wp(z) = 1 + z \wp(z)^2$$

$$\wp(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

ITERATES OF $f(x)$

$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} x & \text{if } k=0 \\ f(f^{(k-1)}(x)) & \text{if } k>0 \end{cases}$$

ITERATES OF $f(x) := x^2 + \gamma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = \sum_{m \geq 0} c_m \tilde{z}^m$$

$$c_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$



PARKING Function



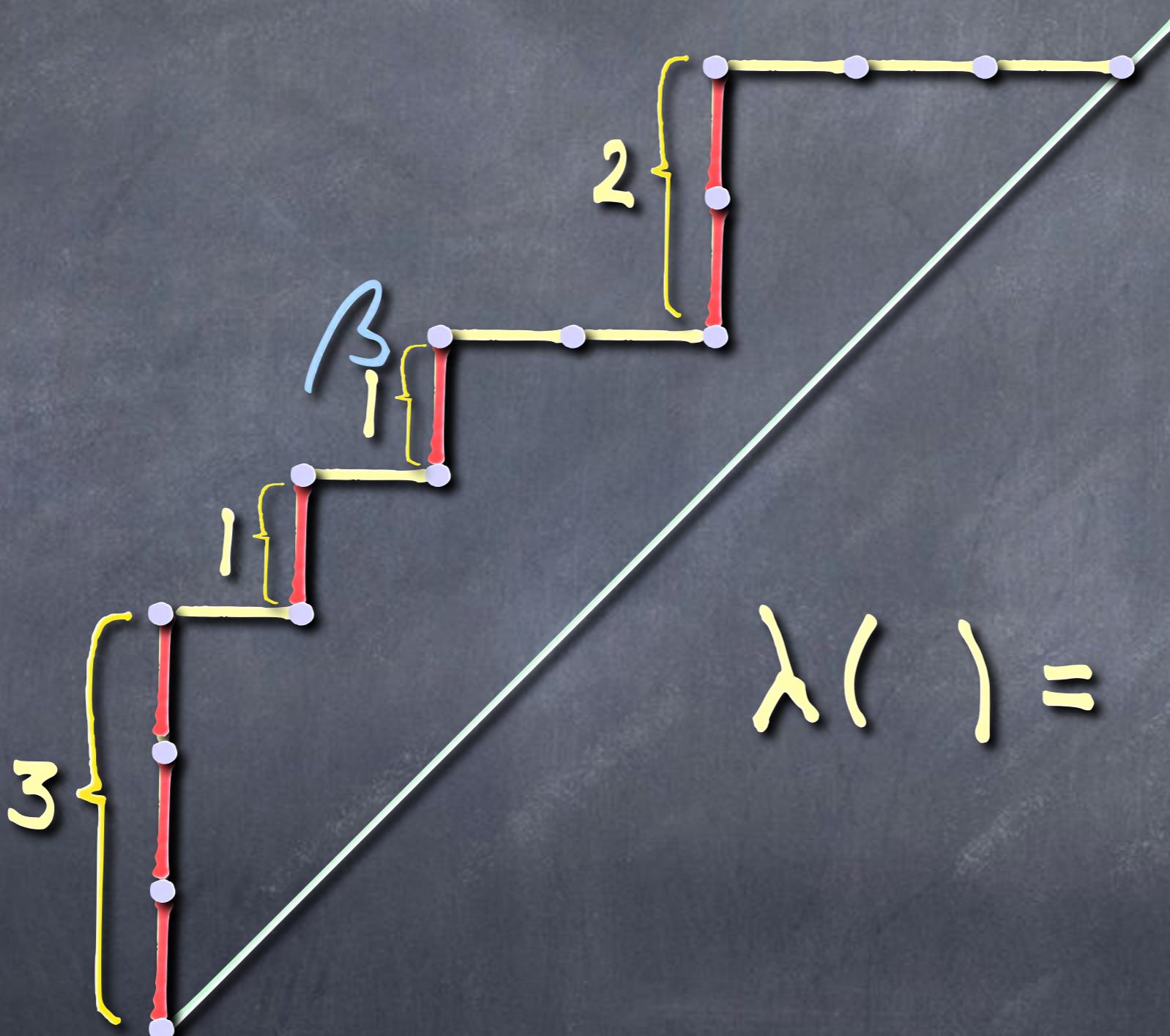
$$p: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$\# p^{-1}(\{1, \dots, k\}) \geq k$$

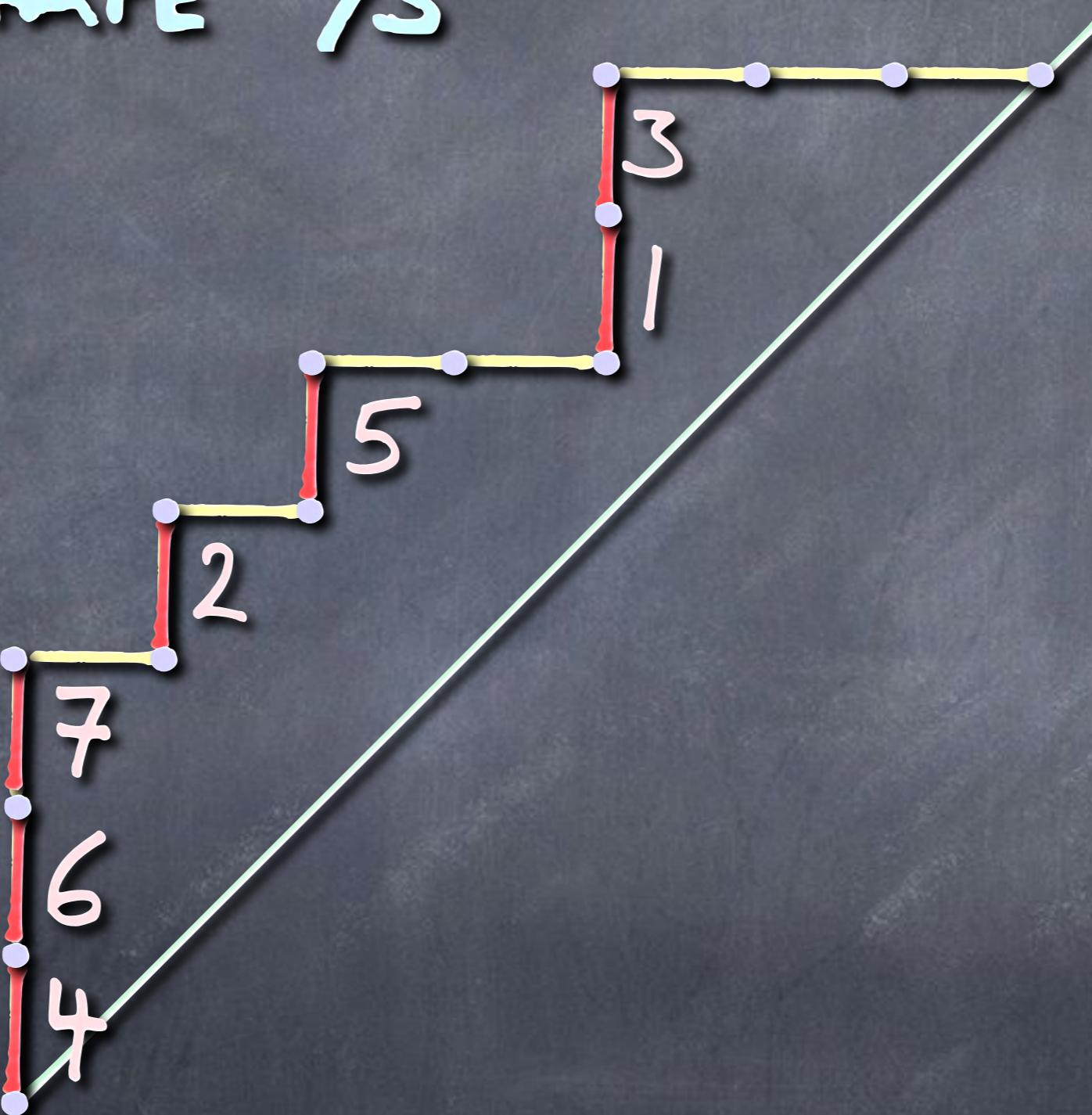
m $m+1$ | 2

$(m+1)^{m-1}$: TOTAL NUMBER OF
PARKING FUNCTIONS

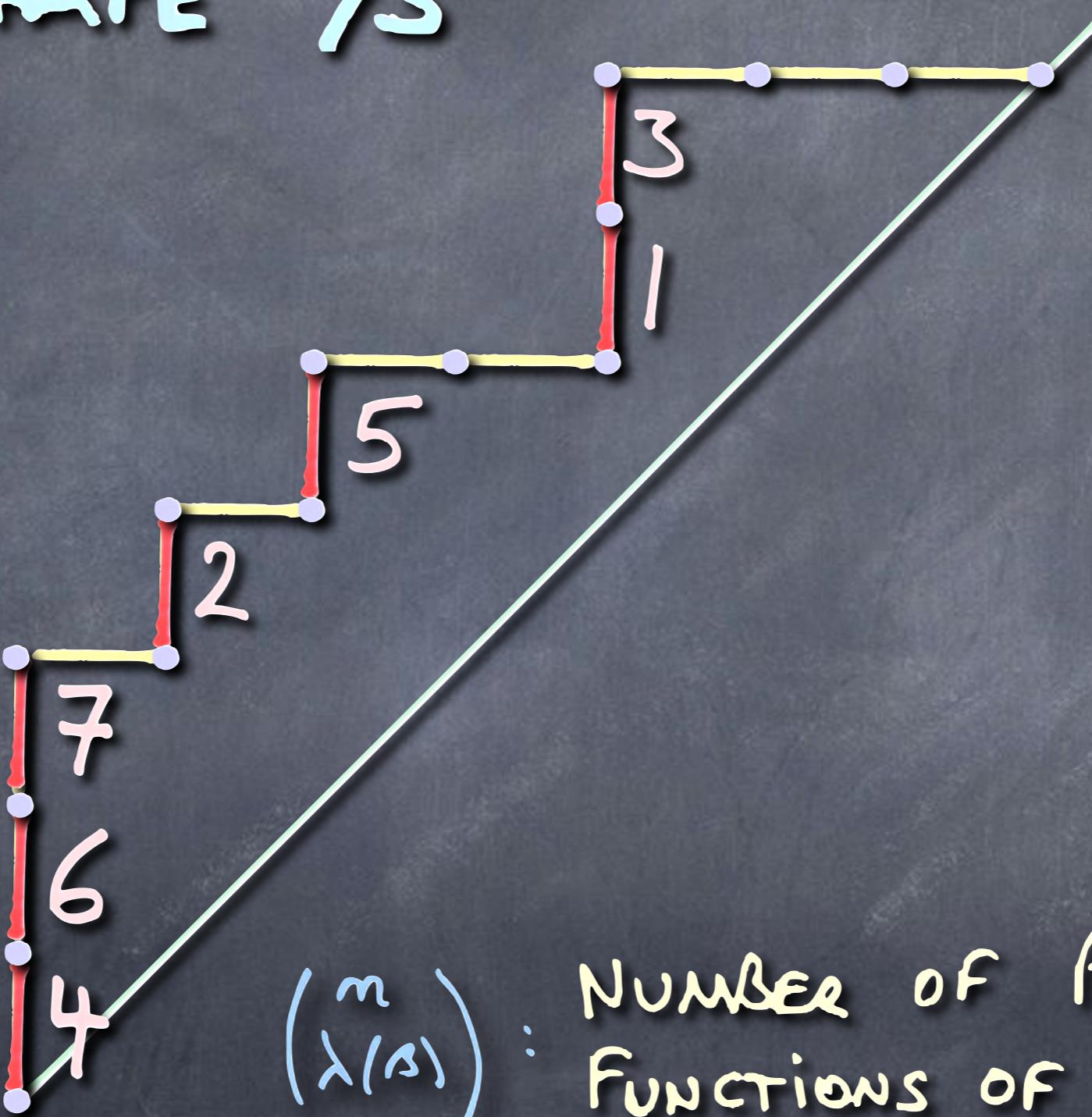
DYCK PATH β



PARKING FUNCTION OF SHAPE β



PARKING FUNCTION OF SHAPE β



$\binom{n}{\lambda(\beta)}$: NUMBER OF PARKING
FUNCTIONS OF SHAPE β

PARKING Function

$$(m+1)^{m-1} = \sum_{\beta} (\lambda^{\beta})$$

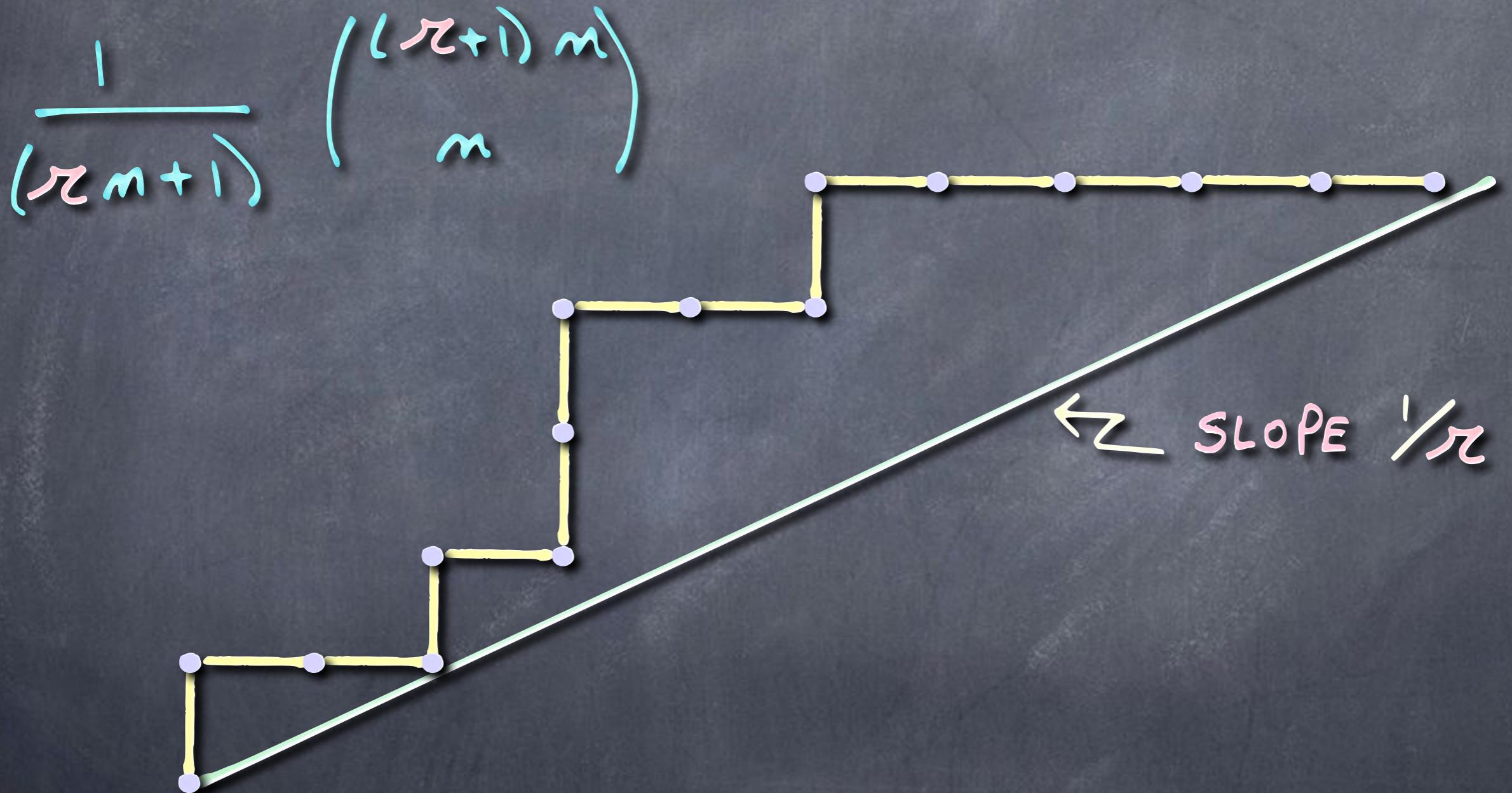


FUSS NUMBERS 1791

$$\frac{1}{(rm+1)} \binom{(1+r)m}{m}$$

NICOLAUS FUSS
(1755 - 1826)

π -DYCK PATH



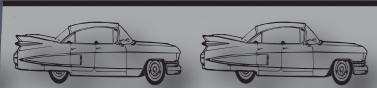
FUSS NUMBERS

1	1	1	1	1	1	1
1	2	5	14	42	132	
1	3	12	55	273	1428	
1	4	22	140	969	7084	

n -PARKING FUNCTION

$$p: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, nr\}$$

$$\# p^{-1}(\{1, \dots, kr\}) \geq k$$

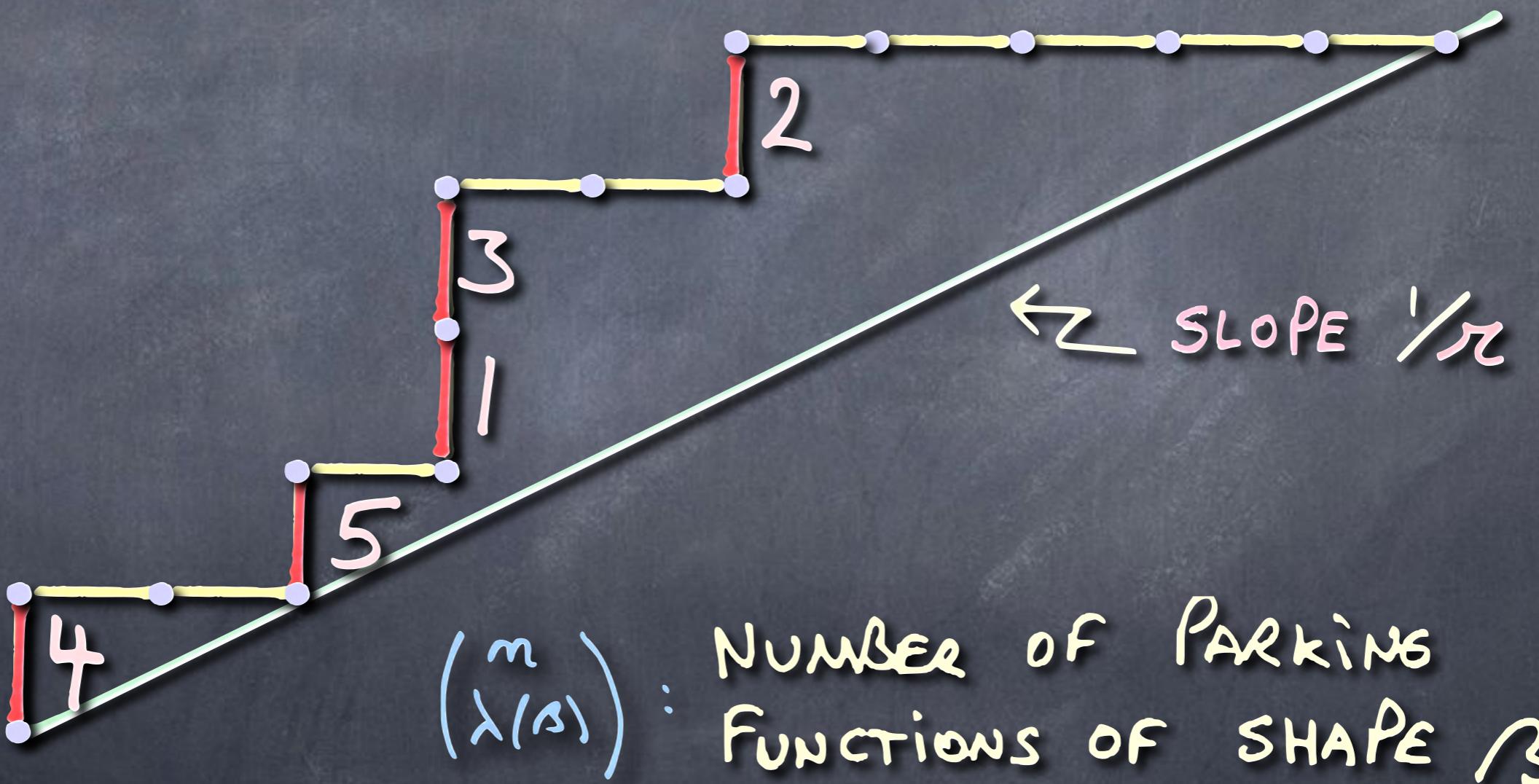


r_m r_{m+1}

1 2

$$(r_{m+1})^{m-1}$$

n - PARKING FUNCTION OF SHAPE β



r -Fonctions de stationnement

$$(rm+1)^{m-1} = \sum_{\beta} \binom{m}{\lambda(\beta)}$$

r -DYCK

CALCULUS AND NUMBER SEQUENCES

AMAZING POWER

1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, ...

$$\sec(x) + \tan(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{6} + 5 \frac{x^4}{24} + 16 \frac{x^5}{120} + \dots$$

TAYLOR SERIES EXPANSION FORMULA

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n &= 1 + nx + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \dots \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots\end{aligned}$$

1,2,3,6,11,23,47,106,235 - OEIS
oeis.org/search?q=1%2C2%2C3%2C6%2C11%2C23%2C47%2C106%2C235&language=english Reader

This site is supported by donations to [The OEIS Foundation](#).



1,2,3,6,11,23,47,106,235 Search Hints
(Greetings from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#))

Search: seq:**1,2,3,6,11,23,47,106,235**

Displaying 1-1 of 1 result found. page 1

Sort: relevance | [references](#) | [number](#) | [modified](#) | [created](#) Format: long | [short](#) | [data](#)

A000055	Number of trees with n unlabeled nodes. (Formerly M0791 N0299)	+20 95
1, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235 , 551, 1301, 3159, 7741, 19320, 48629, 123867, 317955, 823065, 2144505, 5623756, 14828074, 39299897, 104636890, 279793450, 751065460, 2023443032, 5469566585, 14830871802, 40330829030, 109972410221 (list ; graph ; refs ; listen ; history ; text ; internal format)		
OFFSET	0,5	
COMMENTS	Also, number of unlabeled 2-gonal 2-trees with n 2-gons. Equals INVERTi transform of A157904 : (1, 2, 4, 8, 17, 36, 78, 170,...). [From Gary W. Adamson, Mar 08 2009] Equals left border of triangle A157905 [From Gary W. Adamson, Mar 08 2009] Contribution from Robert Munafo, Jan 24 2010: (Start) Also counts classifications of K items that require exactly N-1 binary partitions; see Munafo link at A005646 , also A171871 and A171872 . The 11 trees for N=7 are illustrated at the Munafo web link. Link to A171871/A171872 conjectured by Robert Munafo, then proved by Andrew Weimholt and Franklin T. Adams-Watters on Dec 29 2009. (End)	+20 95
REFERENCES	F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux, Combinatorial Species and Tree-Like Structures, Camb. 1998, p. 279. N. L. Biggs et al., Graph Theory 1736-1936, Oxford, 1976, p. 49. A. Cayley, On the analytical forms called trees, Amer. J. Math., 4 (1881), 266-268. A. Cayley, On the analytical forms called trees, with application to the theory of chemical combinations, Reports British Assoc. Advance. Sci. 45 (1875), 257-305 = Math. Papers, Vol. 9, 427-460 (see p. 459). S. R. Finch, Mathematical Constants, Cambridge, 2003, pp. 295-316. D. D. Grant, The stability index of graphs, pp. 29-52 of Combinatorial Mathematics (Proceedings 2nd Australian Conf.), Lect. Notes Math. 403, 1974. J. L. Gross and J. Yellen, eds., Handbook of Graph Theory, CRC Press, 2004; p. 526. F. Harary, Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969, p. 232. F. Harary and E. M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, NY, 1973, p. 58 and 244. D. E. Knuth, Fundamental Algorithms, 3d Ed. 1997, pp. 386-88. Elena V. Konstantinova and Maxim V. Vidyuk, "Discriminating tests of information and topological indices. Animals and trees", J. Chem. Inf. Comput. Sci., (2003), vol. 43, 1860-1871. See Table 15, column 1 on page 1868. E. M. Palmer and A. J. Schwenk, On the number of trees in a random forest, J. Combin. Theory, B 27 (1979), 109-121. N. Pippenger, Enumeration of equicolorable trees, SIAM J. Discrete Math., 14 (2001), 93-115. R. C. Read and R. J. Wilson, An Atlas of Graphs, Oxford, 1998.	

FIN