

# POLYNÔMES HARMONIQUES

Alain Lascoux



Résumé. Nous décrivons l'espace des polynômes annulés par le Laplacien  $\frac{1}{2} \sum \frac{d^2}{dx^2}$  en tant que représentation du groupe symétrique.

Décembre 1999



## Laplacien et multiplication par $r^2$

Soient  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ . Le *Laplacien* est la demi-somme des carrés des dérivées partielles

$$\nabla := \frac{1}{2} \sum \partial_x^2$$

Une fonction est *harmonique* ssi elle est annulée par le Laplacien.

Le Laplacien vérifie des relations de commutation simples avec la multiplication par  $r^2 := \sum x^2$ . En effet :

$$\nabla r^2 - r^2 \nabla = 2 \sum x \partial_x + n = 2 \text{Eul} + n \quad (1)$$

où *Eul* est l'opérateur d'Euler  $\sum x \partial_x$ .

Soit  $\mathbb{H}$  l'espace des polynômes harmoniques,  $\mathbb{H}^k$  le sous-espace des polynômes harmoniques homogènes de degré  $k$ .

La relation (1) permet de décomposer l'espace *Pol* des polynômes en  $x_1, \dots, x_n$  :

**Proposition.** *L'espace des polynômes décompose en une somme directe*

$$\text{Pol} \simeq \mathbb{H} \oplus r^2 \mathbb{H} \oplus (r^2)^2 \mathbb{H} \oplus (r^2)^3 \mathbb{H} \oplus \dots \quad (2)$$

La restriction à la composante homogène de degré  $k$  de la projection  $\wp : \text{Pol} \mapsto \mathbb{H}$  induite par la décomposition est égale à

$$\wp = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-r^2)^i}{i!(n+2k-4)(n+2k-6)\cdots(n+2k-2-2i)} \nabla^i \quad (3)$$

Ainsi, pour un polynôme de degré  $k$ ,  $f = h_0 + r^2 h_1$  implique que  $h_0 = f - \frac{r^2}{(n+2k-4)} \nabla(f)$ ,  $h_1 = \frac{1}{n+2k-4} \nabla(f)$ . Au cran suivant,  $f = h_0 + r^2 h_1 + (r^2)^2 h_2$  implique

$$h_0 = f - \frac{r^2}{n+2k-4} \nabla(f) + \frac{(r^2)^2}{2(n+2k-4)(n+2k-6)} \nabla^2(f) ,$$

$$h_1 = \frac{1}{(n+2k-4)} \nabla(f) - \frac{r^2}{(n+2k-6)(n+2k-8)} \nabla^2(f) ,$$

$$h_2 = \frac{1}{2(n+2k-4)(n+2k-6)} \nabla^2(f) .$$

La proposition précédente a une formulation en terme de représentation :

**Proposition.** *Les opérateurs  $E := \nabla$ ,  $F := r^2/2$ ,  $H := Eul + n/2$  représentent les générateurs de  $Sl(2, \mathbb{C})$ . Les polynômes harmoniques sont les vecteurs de plus haut poids dans cette représentation.*

En d'autres termes,  $E, F, H$  vérifient les relations

$$[E, F] = H \quad \& \quad [H, F] = 2F \quad \& \quad [H, E] = -2E ,$$

et les polynômes harmoniques sont les polynômes annulés par  $E$ .



### Structure multiplicative

Le produit de deux polynômes harmoniques a en général perdu cette faculté. Néanmoins, comme l'espace  $\mathbb{H}$  s'identifie au quotient de  $\mathcal{P}ol$  par l'idéal engendré par  $r^2 : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}ol/r^2 \mathcal{P}ol$ , on peut utiliser le morphisme  $\wp$  pour retrouver une loi associative sur  $H$  :

$$(h, h') \mapsto \wp(hh')$$

Plus généralement, tout polynôme  $f$  induit un morphisme

$$\theta_f : \mathbb{H} \ni h \mapsto \wp(fh) := f \star h \in \mathbb{H} .$$

Le cas le plus simple est celui où  $f$  est une indéterminée (disons  $x_j$  et notons  $\theta_j := \theta_{x_j}$ ).

**Lemme.** *La restriction de  $\theta_j$  à l'espace  $\mathbb{H}_k$  est*

$$\theta_j := x_j - \frac{1}{n+2k-2} r^2 \partial_{x_j} . \tag{4}$$

*Preuve.* Résulte de (3).

Faisant disparaître le degré, on peut écrire que

$$\tilde{\theta}_j := x_j \nabla r^2 - 2x_j - r^2 \partial_{x_j} \tag{5}$$

préserve l'espace  $\mathbb{H}$ .

Ce n'est pas le commutateur de  $\partial_{x_j}$  et  $\theta_j$  qui est simple, mais plutôt :

**Lemme.** Pour tout  $j : 1 \leq j \leq n$ , la restriction de  $\theta_j$  à  $\mathbb{H}_k$  satisfait

$$\partial_{x_j} \theta_j - \frac{n + 2k - 4}{n + 2k - 2} \theta_j \partial_{x_j} = 1 . \quad (6)$$

Bien entendu, on itère  $\theta_j$ , et l'on désire l'expression explicite des puissances de  $\theta_j$  en fonction des puissances de  $r^2$  et  $\partial_{x_j}$ . C'est ici que l'on voit apparaître des polynômes dont nous rappelons la définition.

*Définition.* Etant donnés deux paramètres  $\alpha, p$  et une indéterminée  $x$ , les polynômes de Gegenbauer  $G(k, \alpha, x, p)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont définis par la fonction génératrice

$$(1 - 2zx + pz^2)^{-\alpha} = \sum_k z^k G(k, \alpha, x, p) . \quad (7)$$

Les polynômes de Gegenbauer normalisés  $\tilde{G}(k, \alpha, x, p)$  sont les polynômes unitaires correspondants. Les polynômes classiques sont les spécialisations  $G(k, \alpha, x, 1)$ .

De la fonction génératrice (7) on tire la valeur des deux dérivées :

$$\frac{d}{dx} \tilde{G}(k, \alpha, x, p) = k \tilde{G}(k - 1, \alpha + 1, x, p) , \quad (8)$$

$$\frac{d}{dp} \tilde{G}(k, \alpha, x, p) = -\frac{k(k - 1)}{4(\alpha + k - 1)} \tilde{G}(k - 2, \alpha + 1, x, p) . \quad (9)$$

Vilenkin [Vi], [V-K] se sert des polynômes de Gegenbauer comme constituants élémentaires des polynômes harmoniques. On vérifie en effet la nullité de  $\nabla \left( (1 - 2zx_j + z^2\psi_2)^{-n/2+1} \right)$ , ce qui veut dire que les polynômes  $G(k, n/2 - 1, x_j, \psi_2)$ , pour tous  $k, 1 \leq j \leq n$ , sont harmoniques. Vilenkin décrit une base de  $\mathbb{H}$  constituée de produits de polynômes de Gegenbauer. Nous préférons montrer, par la proposition suivante (dont la démonstration est une simple vérification) que ces polynômes apparaissent dans l'itération de (4). Fixons  $j$ , écrivons  $x, \theta, D$  pour  $x_j, \theta_j, \partial_{x_j}$ , et  $\psi$  pour  $r^2$ . Pour un choix de  $n, k$ , écrivons aussi  $[i] := n + 2k - 4 + 2i$ ,  $\tilde{G}(m) := \tilde{G}(m, n/2 - 1 + k, x, \psi)$ .

**Proposition.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Alors la restriction de  $\theta^m$  à l'espace  $H_k$  décompose en

$$\theta^m = \tilde{G}(m) - \frac{\binom{m}{1} \psi}{[m]} \tilde{G}(m-1) D + \frac{\binom{m}{2} \psi^2}{[m-1][m]} \tilde{G}(m-2) D^2 - \dots + \frac{(-\psi)^m}{[1] \dots [m]} \tilde{G}(0) D^m \quad (10)$$

Par exemple,

$$\theta^4 = \tilde{G}(4) - \frac{4\psi \tilde{G}(3)}{n+2k+4} D + \frac{6\psi^2 \tilde{G}(2)}{(n+2k+2)(n+2k+4)} D^2 - \frac{4\psi^3 \tilde{G}(1)}{(n+2k)(n+2k+2)(n+2k+4)} D^3 + \frac{\psi^4}{(n+2k-2)(n+2k)(n+2k+2)(n+2k+4)} D^4$$

avec

$$\tilde{G}(4) = x^4 - \frac{6\psi x^2}{2k+4+n} + \frac{3\psi^2}{(2k+4+n)(2k+2+n)}, \quad \tilde{G}(3) = x^3 - \frac{3\psi x}{2k+2+n}$$

$$\tilde{G}(2) = x^2 - \frac{\psi}{n+2k}, \quad \tilde{G}(1) = x.$$



### Polynômes harmoniques comme module sur $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^\diamond$

Nous avons seulement utilisé la multiplication par la deuxième somme de puissances  $r^2$ . Les autres ont leur rôle à jouer. Notons  $\psi_k$  la multiplication par la  $k$ -ième somme de puissance  $\sum x^k$  ( $\psi_0 = n$  est le cardinal de l'ensemble  $\mathbb{X}$  d'indéterminées). On pose de plus  $\psi_k = 0$  pour  $k < 0$ .

Grâce à la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit, on vérifie aisément les relations de commutation suivantes (qui généralisent (1)) :

$$\nabla \psi_k - \psi_k \nabla = k \sum x^{k-1} \partial_x + \frac{k(k-1)}{2} \psi_{k-2} \quad (11)$$

Au paragraphe précédent, nous avons déformé la multiplication par un polynôme quelconque en un opérateur sur  $H$ , cet opérateur pouvant s'expliciter par itération de (4). Soit donc pour tout entier  $k$ ,

$$\Psi_k : \mathbb{H} \ni h \mapsto \wp(\psi_k h) = \psi_k \star h \in \mathbb{H} .$$

En fait la relation (1) implique que  $\Psi_2$  soit l'opérateur nul. Soit  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$  l'anneau engendré par  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  : il est isomorphe à l'anneau des polynômes symétriques. Soit de plus  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^+$  l'idéal de  $\mathcal{P}ol$  engendré par les polynômes symétriques sans terme constant. Notons  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^\diamond$  l'anneau engendré par  $\Psi_1, \Psi_3, \dots, \Psi_n$  (qui est isomorphe à l'anneau engendré par les sommes de puissance d'indices  $1, 3, \dots, n$ ). En mettant un ordre approprié sur les monômes, on peut vérifier que  $\mathbb{H}$  est un module libre sur  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^\diamond$ .

Nous allons voir un énoncé plus précis, en faisant appel aux polynômes harmoniques au sens utilisé en cohomologie des variétés de drapeaux (nous ajouterons l'adjectif *fondamental* pour éviter toute ambiguïté).

*Définition.* Un polynôme harmonique fondamental est un polynôme annulé par tous les opérateurs différentiels en  $x_1, \dots, x_n$  symétriques.

Il est clair que le Vandermonde  $V := \prod_{i < j \leq n} (x_i - x_j)$  est une harmonique fondamentale, de même que toutes ses dérivées. Pour un vecteur  $J = [j_1, \dots, j_n] \in \mathbb{N}^n$ , notons  $V_J = \partial_x^J(V) := \partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_n}^{j_n}(V)$ . Le vecteur  $\rho := [n-1, \dots, 1, 0]$  joue un rôle essentiel. On a alors ([Bo]) :

**Proposition.** Soit  $\mathcal{H}$  l'espace vectoriel des harmoniques fondamentales en  $x_1, \dots, x_n$ . Alors  $\mathcal{H}$  est de dimension  $n!$ , de base les  $V_J$ ,  $J \leq \rho$ .

Le morphisme  $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{P}ol/\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^+$  est un isomorphisme.

Les calculs dans le quotient  $\mathcal{P}ol/\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^+$  font appel à la riche combinatoire des différences divisées et des polynômes de Schubert cf. [LS]). L'isomorphisme ci-dessus permet d'en déduire des relations dans  $\mathcal{H}$ , en particulier de décomposer les harmoniques fondamentales dans les différentes bases naturelles (cf. [La]). On n'a en fait pas besoin de quotienter l'anneau des polynômes, les outils évoqués permettent de décrire  $\mathcal{P}ol$  en tant que module sur  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$ . Pour un polynôme  $f \in \mathcal{P}ol$  notons  $f^\sigma$  son image par une permutation  $\sigma$  et en particulier,  $f^\omega$  son image par  $\omega := [n, \dots, 1]$ .

**Proposition.** L'anneau  $\mathcal{P}ol$  des polynômes en  $x_1, \dots, x_n$  est un module libre sur  $Sym$ , de base les polynômes de Schubert  $X_\sigma$  indicés par les permutations de  $\mathfrak{S}_n$ . La  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$ -forme quadratique

$$\mathcal{P}ol \ni f, g \mapsto (f, g) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (fg/V)^\sigma \in \mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$$

est non dégénérée.

La matrice des  $(X_\sigma, X_\nu^\omega)$  est une matrice de permutation.

La forme quadratique permet d'écrire facilement tout polynôme comme une somme de polynômes de Schubert, à coefficients dans  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$ . Elle permet donc aussi de décomposer tout polynôme dans une base telle que la matrice de changement de base avec les polynômes de Schubert soit triangulaire.

Définissons, pour chaque  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , le polynôme de Schubert harmonique  $X_\sigma^h$  comme le polynôme harmonique fondamental congru à  $X_\sigma$  modulo l'idéal  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^+$ . Tout polynôme peut donc s'écrire de manière unique comme une somme de polynômes de Schubert harmoniques, à coefficients dans  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$ .

Soit  $h = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_\sigma X_\sigma^h$ ,  $c_\sigma \in \mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}$ , un polynôme harmonique. Alors  $h$  coïncide avec  $\sum c_\sigma \star X_\sigma^h \star 1$  modulo l'idéal engendré par  $\psi_2$ . Mais  $\sum c_\sigma \star X_\sigma^h$  est harmonique, et l'on a donc  $h = \sum c_\sigma \star X_\sigma^h$ . Cette décomposition explicite implique le théorème suivant :

**Théorème.** *L'espace  $\mathbb{H}$  des polyômes harmoniques est un module libre sur  $\mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}^\diamond = \mathbb{C}[\Psi_1, \Psi_3, \dots, \Psi_n]$ , de base les polynômes de Schubert harmoniques  $\{X_\sigma^{\hbar}, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ , ou les classes  $\wp(X_\sigma)$  des polynômes de Schubert.*

Pour  $\mathfrak{S}_3$ , on a les polynômes de Schubert suivants:

$$X_{123} = X_{123}^{\hbar} = 1, \quad X_{213} = X_{213}^{\hbar} = x_1, \quad X_{132} = X_{132}^{\hbar} = x_1 + x_2$$

$$X_{312} = x_1^2, \quad X_{312}^{\hbar} = x_1^2 - \frac{2\psi_1}{3}x_1 + \frac{2\psi_1^2}{9} - \frac{\psi_2}{3}$$

$$X_{231} = x_1x_2, \quad X_{231}^{\hbar} = x_1x_2 - \frac{\psi_1}{3}(x_1 + x_2) + \frac{\psi_1^2}{18} + \frac{\psi_2}{6}$$

$$X_{321} = x_1^2x_2, \quad X_{321}^{\hbar} = x_1^2x_2 - \frac{\psi_1}{3}x_1^2 - \frac{2\psi_1}{3}x_1x_2 + \frac{\psi_2}{3}x_1 + \frac{\psi_1^2 - \psi_2}{6}(x_1 + x_2) + \frac{\psi_3 - \psi_2\psi_1}{6}$$

Par ailleurs, les  $\wp(X_\sigma)$  pour  $\mathfrak{S}_3$  coïncident avec les  $X_\sigma$ , mis-à-part  $\wp(X_{312}) = x_1^2 - \psi_2/3$  et  $\wp(X_{321}) = x_1^2x_2 - \psi_2x_2/5$ .

La structure décrite par le théorème est évidemment compatible avec l'action du groupe symétrique, ce qui fait que l'on peut décrire les multiplicités des représentations du groupe symétrique agissant sur  $\mathbb{H}$ .

Rappelons que les représentations irréductibles  $S_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_n$  sont en bijection avec les partitions  $\lambda$  de  $n$ , et que la multiplicité (graduée) de  $\lambda$  dans  $\mathcal{H}$  est égale au *polynôme de Kostka*  $K_{\lambda,1^n}$ , qui peut s'écrire  $K_{\lambda,1^n} = q^{n(\lambda)}(1-q) \cdots (1-q^n) / \prod_{\square} (1-q^{\ell(\square)})$ , produit sur toutes les longueurs d'équerre des boîtes  $\square$  du diagramme de  $\lambda$  (cf. [Ma]). On a donc :

**Proposition.** *Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Alors la multiplicité graduée  $\sum_k m(\lambda, \mathbb{H}_k) q^k$ , où  $m(\lambda, V)$  est la multiplicité de  $S_\lambda$  dans un  $\mathfrak{S}_n$ -espace  $V$ , est égale à*

$$K_{\lambda,1^n} / (1-q)(1-q^3) \cdots (1-q^n) = \frac{1-q^2}{\prod_{\square} (1-q^{\ell(\square)})}. \quad (12)$$

Par exemple, il y a 5 représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_4$ . La composante  $\lambda = [4]$  de  $\mathbb{H}$  a pour multiplicité

$$1/(1-q)(1-q^3)(1-q^4),$$

celle de  $\lambda = [3, 1]$  est

$$\frac{q + q^2 + q^3}{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)} = q \frac{1-q^2}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^4)} = \frac{q}{(1-q)^2(1-q^4)}.$$





## Polynômes harmoniques symétriques

La composante  $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\mathfrak{m}^\diamond \mathbf{1}$  est l'espace des polynômes harmoniques symétriques que l'on peut chercher à caractériser en tant que sous-espace de l'anneau des polynômes symétriques  $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\mathfrak{m} = \mathbb{C}[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$ .

Le Laplacien est un opérateur différentiel du second ordre, et sa restriction à  $\mathfrak{S}\mathfrak{H}\mathfrak{m}$  est un opérateur différentiel du second ordre en les  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Son expression est déterminée par l'image de tous les  $\psi_i$  et tous les  $\psi_i \psi_j$ . Ecrivant  $D_i := i \partial_{\psi_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on obtient

**Proposition.** *La restriction du Laplacien aux fonctions symétriques en  $n$  indéterminées est égale à*

$$\nabla := \frac{1}{2} \sum \partial_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \psi_{2i-2} D_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \psi_{i+j-2} D_i D_j + \sum_{2 \leq i \leq n} \binom{i}{2} \psi_{i-2} D_i \quad (13)$$

On peut remarquer que, similairement, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum x^k \partial_x = \psi_k D_1 + \psi_{k+1} D_2 + \psi_{k+2} D_3 + \dots,$$

où maintenant  $\psi_k$  désigne  $\sum x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $\sum \partial_x = \psi_0 D_1 + \psi_1 D_2 + \psi_2 D_3 + \dots$ ,  $Eul = \sum x \partial_x = \psi_1 D_1 + \psi_2 D_2 + \psi_3 D_3 + \dots$ .

Comme chaque variable n'apparaît qu'en degré 1 dans les fonctions élémentaires  $\Lambda^i$  (définies par la fonction génératrice  $\sum z^i \Lambda^i := (1 + zx_1) \cdots (1 + zx_n)$ ), le Laplacien exprimé en terme des dérivées  $D_i^\Lambda := \frac{d}{d_{\Lambda^i}}$  est tout aussi simple. En effet, la dérivée par rapport à  $x := x_1$  de  $\Lambda^k = \Lambda^k(x_1, \dots, x_n)$  est égale à  $\Lambda^{k-1}(x_2, \dots, x_n) = \Lambda^{k-1} - x \Lambda^{k-1} + x^2 \Lambda^{k-1} + \dots + (-x)^{k-1}$ .

Par sommation sur  $x_i$ , on a donc que l'image de  $\Lambda^i \Lambda^j$  par le Laplacien est égale à

$$c_{i,j,n} := n \Lambda^{i-1} \Lambda^{j-1} - \psi_1 (\Lambda^{i-2} \Lambda^{j-1} + \Lambda^{i-1} \Lambda^{j-2}) + \psi_2 (\Lambda^{i-3} \Lambda^{j-1} + \Lambda^{i-2} \Lambda^{j-2} + \Lambda^{i-1} \Lambda^{j-3}) \\ + \dots \pm \psi_{i+j-2} (\Lambda^0 \Lambda^0).$$

On peut simplifier ces fonctions: ce sont des sommes à coefficients positifs de fonctions monomiales indicées par des partitions n'ayant que des parts 1 et 2. Je trouve,  $i \leq j$ , l'expression suivante dans la base des fonctions élémentaires :

$$c_{i,j,n} = (n-j+1) \Lambda^{i-1} \Lambda^{j-1} - \sum_{1 \leq k \leq i-1} (j-i-2+2k) \Lambda^{i-1-k} \Lambda^{j-1+k}. \quad (14)$$

**Proposition.** *La restriction du Laplacien aux fonctions symétriques en  $n$  indéterminées est égale à*

$$\nabla := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i, j, n} D_i^\Lambda D_j^\Lambda . \quad (15)$$

Par exemple, pour  $n = 3$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla = & \frac{3}{2} D_1^\Lambda D_1^\Lambda + 2\Lambda^1 D_1^\Lambda D_2^\Lambda + \Lambda^2 D_1^\Lambda D_3^\Lambda + (\Lambda^1 \Lambda^1 - \Lambda^2) D_2^\Lambda D_2^\Lambda + \\ & + (\Lambda^1 \Lambda^2 - 3\Lambda^3) D_2^\Lambda D_3^\Lambda + \frac{1}{2} (\Lambda^2 \Lambda^2 - 2\Lambda^1 \Lambda^3) D_3^\Lambda D_3^\Lambda \end{aligned}$$

Chacune des expressions (13) ou (15) permet un calcul direct de fonctions symétriques, exprimées soit dans la base  $\psi_i$ , soit dans la base  $\Lambda^i$ . Nous ne traiterons pas ici la combinatoire de la restriction du Laplacien aux fonction symétriques.

Par ailleurs, Dunkl [Du] a défini une déformation des dérivées  $\partial_i$  par des différences divisées, et par là même, une déformation du Laplacien et des polynômes harmoniques. Tous les résultats que nous avons donnés dans ce texte se transportent au paradigme Dunkélien, mais les expressions explicites sont plus compliquées.



## Références

- [Bo] A. Borel. Cohomologie des espaces fibrés principaux, *Annals of Math.* **57** (1953) 115-207.
- [Du] C.F. Dunkl. Hankel transforms associated to finite reflection groups, *Contemp. Math.* **138** (1992) 123-138.
- [La] A. Lascoux. Cyclic permutations on words, tableaux and harmonic polynomials, *Proc of Hyderabad Conference on Algebraic Groups*, Manoj Prakashan, Madras (1991).
- [LS] A. Lascoux & M.P. Schützenberger. Symmetry and Flag manifolds, *in Invariant Theory, Springer L.N.* **996** (1983) 118-144.
- [Ma] I.G. Macdonald. Symmetric functions and Hall polynomials, *Oxford Math. Mono.* (1995).
- [Ve] S. Veigneau. *ACE, an algebraic environment for the computer algebra system MAPLE*, <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~ace> (1998).
- [Vi] N.J Vilenkin. Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod Paris.
- [V-K] N.J Vilenkin, A. Klimyk. Representations of Lie Groups and special functions, vol 2, Kluwer (1993).